Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Equações de 1.º Grau

Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações de 1.º grau.

Carlos F. Fernandes

Mestrado em Ensino da Matemática

2011

Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Equações de 1.º Grau

Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações de 1.º grau.

Carlos F. Fernandes

Mestrado em Ensino da Matemática

Orientadora: Prof. Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos
Co-Orientador: Prof. Doutor Carlos Manuel Ribeiro Albuquerque

2011

Resumo

O estudo procura compreender de que forma a unidade de ensino baseada no estudo das equações contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade, em particular na resolução e simplificação de equações de primeiro grau, nas estratégias que usam e nos erros e dificuldades que experimentam. Dado a resolução de problemas ocupar um lugar de destaque neste estudo, pretende-se ainda perceber de que forma os alunos mobilizam os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas. A investigação assenta numa metodologia qualitativa e baseia-se em dois estudos de caso de alunos com desempenhos distintos. Os principais instrumentos utilizados na recolha de dados foram a recolha documental, a observação, o questionário e a entrevista.

Os resultados evidenciam que um dos alunos desenvolveu o seu pensamento algébrico, compreendeu os princípios de equivalência e optou por estratégias adequadas na resolução de equações, não exibindo grandes dificuldades. O outro aluno revelou não ser capaz de se distanciar da Aritmética e evidenciou erros na resolução de equações. A incompreensão dos princípios de equivalência esteve na base da escolha de estratégias erróneas para a resolução de equações. Na resolução de problemas, os alunos, maioritariamente, privilegiam estratégias aritméticas e resistem em utilizar linguagem algébrica, não lhe reconhecendo utilidade. Porém, revelam evolução na tradução da linguagem natural para linguagem matemática, o que é um princípio para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Palavras-chave: Álgebra, Pensamento algébrico, equações, dificuldades, erros, resolução de problemas.

Abstract

The study seeks to understand, how the education unit based on the study of the equations, contributes to the development of the algebraic thinking of pupils from 7th grade, in particular in the first degree equation solving and simplification, on strategies used and errors and difficulties they experiment. Given that problem-solving occupies a highlight space in this study, it's a purpose to understand in what way pupils mobilize the knowledge acquired into problem-solving. The investigation follows a qualitative methodology and is based on two case studies of pupils with distinct performances. The main instruments used in the data collection were the logbook, observation, questionnaire and the interview.

The results show that one of the pupils, object of study, developed his algebraic thinking, understood the equivalence principals and chose appropriate strategies on equation solving, showing no greater difficulties. The other pupil revealed not being able to distance herself from arithmetic and evidenced errors in solving equations. The incomprehension of the equivalence principles was behind incorrect strategy choices in solving equations. On problem-solving, students mainly, privilege arithmetical strategies and resist on using algebraic language, not recognizing its utility. Yet, they disclose evolution in the translation of natural language to mathematical language which is a beginning towards their algebraic thinking development.

Keywords: Algebra, algebraic thinking, equations, difficulties, errors, problem-solving.

Para o Gonçalo,

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradecer a Deus e à minha família pelo apoio e a força que me deram durante este trabalho.

À Professora Leonor Santos, a minha orientadora. Obrigado pelas sugestões, conselhos, paciência e orientação. Foi uma verdadeira orientadora!

Ao Professor Carlos Albuquerque pela orientação nos conceitos matemáticos.

Ao Nuno Candeias, pela paciência, conselhos, disponibilidade, pelas horas de reflexão e por partilhar a sua experiência ao longo deste ano.

Dedico este trabalho ao meu filho Gonçalo, pelas horas de diversão, brincadeira e apoio que lhe subtrai e dividi neste último ano. Compensará, quando chegar a altura de aprender as equações.

À Tânia, minha mulher, pela paciência e pelo apoio incondicional. Pela ajuda preciosa nos acertos finais deste trabalho e por “aturar” tanta Álgebra em casa. Obrigado por acreditares em mim…

À Teresa Marques, pelo incentivo de frequentar o mestrado, pelos sábios conselhos, pelas inúmeras reflexões e pelo exemplo de professora…Obrigado!

Aos colegas de curso, por todos os bons e outros momentos que passámos. Espero que as nossas vidas se voltem a cruzar. Um especial obrigado ao Pedro, meu companheiro das aulas…

Aos professores deste mestrado, que de alguma forma marcaram a minha vida e tanto aprendi convosco. Obrigado!

Aos alunos envolvidos neste estudo. Um obrigado pela disponibilidade e pelo entusiasmo com que realizaram as tarefas.

Índice

Índice de Anexos

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introdução

De acordo com o Programa de Matemática, a aprendizagem da Álgebra no Ensino Básico visa desenvolver nos alunos o pensamento algébrico. Ao desenvolverem este tipo de pensamento, os alunos terão oportunidade de exprimir simbolicamente variadas situações em contexto matemático e não matemático. A par do pensamento algébrico está a capacidade de abstracção. Inicialmente o aluno é confrontado com situações concretas e a pouco e pouco é convidado a enveredar em situações progressivamente mais abstractas. Para muitos alunos não existe grande utilidade imediata na procura da generalização e talvez por isso a aprendizagem da Álgebra constitua um entrave na vida de muitos.

No presente capítulo explícito as motivações pessoais para a realização deste trabalho, defino a problemática e as questões de investigação que pretendo desenvolver ao longo do estudo, tendo em vista o enquadramento curricular do ensino da Álgebra, no que se refere ao tópico das equações do 1.ºgrau.

Motivações Pessoais

Iniciei o meu primeiro contacto com o estudo das equações de primeiro grau na década de oitenta quando frequentava o 7.º ano de escolaridade. Recordo que nesta altura senti uma frustração enorme, pois de início, senti dificuldade em compreender porque que se utilizavam letras na disciplina de Matemática. A resolução de equações, baseavam-se num conjunto de regras que eu religiosamente memorizei, sendo a mais importante a que se enunciava como "passa para o outro lado e troca de sinal". Adoptei esta forma de resolver as equações, pois assim conseguia ter boas notas nos testes de Matemática e resolvia com sucesso as equações que me eram apresentadas. Só anos mais tarde consegui entender realmente o que era uma equação e que as regras que tinha memorizado se baseavam em princípios de equivalência.

Actualmente, ainda é frequente ouvir-se que para resolver equações basta trocar de membro e mudar o sinal. Um grande número de alunos vê a Matemática, em particular a Álgebra, como um conjunto de regras e limitam-se a imitar procedimentos rotineiros. Nestes casos, os conceitos são ensinados e não aprendidos e não existe aprendizagem significativa. Deste modo, não desenvolvem o raciocínio abstracto e consequentemente o pensamento algébrico.

Devido à natureza do ensino na década de oitenta, eu, enquanto aluno, não tive a oportunidade de desenvolver em boa hora o pensamento e a linguagem algébrica. Limitei-me a cumprir exercícios rotineiros e "treinar" a resolução de equações. Actualmente, constato que existe um elevado número de alunos que continua a tomar a mesma opção que eu adoptei há vinte anos atrás. Neste sentido, espero contribuir para uma diferente visão da Álgebra e da resolução de equações, em particular, e promover junto dos alunos uma perspectiva mais actual desta área da matemática, de modo a poderem entender o significado da representação simbólica, pensar genericamente e a valorizar a linguagem algébrica como meio de expressar ideias.

A aprendizagem das equações representa, para os alunos, o início de uma nova etapa no seu estudo da Matemática (Ponte, 2004). Como tudo na vida, no início de novas etapas é habitual que surjam dificuldades. É precisamente neste início, onde surgem dificuldades e erros habituais que pretendo focar o presente estudo. No seu desenvolvimento deverei estar atento à possibilidade de ocorrência dos erros e dificuldades que possam surgir no processo de ensino e aprendizagem. O grande desafio pessoal será, não só identificar os erros e dificuldades, mas entender as causas que conduzem os alunos a cometer este tipo de erros ou a experimentar dificuldades no capítulo da Álgebra, em particular no estudo das equações.

Problemática

De acordo com o Programa da Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), o grande objectivo do ensino da Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. São vertentes fundamentais do pensamento algébrico o uso de diferentes sistemas de representação, a generalização de regularidades estabelecendo relações para uma certa classe de objectos e a resolução de problemas, que inclui a modelação de situações, utilizando desta forma expressões algébricas, equações ou inequações.

Este estudo tem por base uma proposta pedagógica da unidade de ensino subordinada ao tema "Equações". É desenvolvido numa turma de 7.º ano da Escola Básica 2,3 Vasco Santana ao longo de oito aulas de 45 minutos que decorreram no início do terceiro período do ano lectivo de 2010/2011. O seu principal objectivo é compreender de que forma a unidade de ensino baseada no estudo das equações contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade, em particular na resolução e simplificação de equações de primeiro grau. Para tal, formulei as seguintes questões:

- Que estratégias adoptam na resolução de equações de primeiro grau alunos do 7.º ano de escolaridade?
- Quais os principais erros que alunos do 7.º ano de escolaridade cometem na simplificação e resolução de equações de primeiro grau?
- Como alunos do 7.º ano de escolaridade mobilizam os conhecimentos adquiridos na unidade de ensino na consecução da resolução de problemas que envolvem equações?

De acordo com as orientações curriculares para este ano de escolaridade procurei propor aos alunos tarefas de cunho exploratório e trabalhar problemas em contexto real relacionados com o tema equações de primeiro grau.

Tendo em conta a problemática definida, procurei responder às questões do estudo utilizando para recolha de dados: um questionário aplicado a todos os alunos, observação de aulas com registo áudio acompanhada por um diário de bordo, recolha de produções escritas dos alunos e entrevista a dois alunos seleccionados.

Com este estudo, pretendo não só responder às questões formuladas mas proporcionar a oportunidade de os alunos desenvolverem o pensamento algébrico e quem sabe, identificar novas questões de estudo para o futuro.

Capítulo 2

Ensino e Aprendizagem da Álgebra

Nos últimos anos, constata-se que existe uma corrente que defende a inclusão do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. O Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) vai ao encontro desta ideia e preconiza a integração do pensamento algébrico desde o 1.º ciclo do ensino básico.

Diversas investigações, no campo da Álgebra, sugerem que os alunos tendem a ter mais dificuldades neste domínio, em parte, porque os programas de Álgebra estão muito centrados na simbologia e os alunos não atribuem significado a essa mesma simbologia, enfatizando, pelo contrário, a aplicação de regras no domínio da Álgebra. Também é frequente, a Álgebra surgir no currículo de matemática um pouco isolada de outros temas matemáticos, o que não favorece a aprendizagem. Kaput (1999, in Canavarro, 2009, p.13), afirma que a"A Álgebra escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desligados quer de outros conteúdos matemáticos, quer do mundo real dos alunos".

No presente capítulo, pretendo referenciar o trabalho de alguns investigadores, cujo contributo considero ser de valor inestimável no que concerne ao ensino e aprendizagem da Álgebra. Para melhor compreender a Álgebra de hoje, dedico o início do capítulo à sua evolução histórica e tendo em conta o seu progresso, continuo com uma breve revisão sobre as perspectivas da Álgebra escolar. Tendo em vista as questões deste estudo, dedico a segunda parte deste capítulo à resolução das equações, apreciando alguns artigos que referem as diferentes estratégias de resolução bem como os erros e as dificuldades mais comuns que surgem na resolução de equações do 1.º grau. Considerando ainda a estreita ligação entre as equações e a resolução de problemas, dedico a última parte deste capítulo à importância de resolver problemas no ensino da Matemática e da Álgebra referindo uma breve revisão da literatura relacionada com *word problems*.

A Álgebra ao longo dos tempos

Ao longo da história da Álgebra e dos seus símbolos, as letras têm sido usadas para representar quantidades desconhecidas, incógnitas e para resolver equações. A Álgebra nem sempre foi o que hoje conhecemos. Ao longo do tempo, tem-se vindo a afastar mais das formulações em texto dando lugar a uma linguagem simbólica. No entanto, o caminho até chegar ao simbolismo foi bastante longo, contando quase dois mil anos. Para Baumgart (1994), a origem da palavra "Álgebra" é estranha e intrigante. Esta não é sujeita a uma etimologia nítida como, por exemplo, apalavra "Aritmética", que deriva do grego *aritmhos*, que significa números. Álgebra é uma variante latina da palavra árabe, *al-jabr*, usada no título de um livro, *Hisab al-jabr w´al-muqabalah*, escrito em Bagdad por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi. Para o autor a melhor tradução da palavra é simplesmente a "ciência das equações". Ainda que originalmente "Álgebra" se refira a equações, a palavra hoje tem um significado mais amplo e para chegar a uma definição consensual é necessário considerar duas fases: i) Álgebra Antiga (elementar) que visa o estudo das equações e métodos de as resolver; ii) Álgebra moderna (abstracta) que se refere ao estudo das estruturas matemáticas.

A fase antiga abrange o período de 1700 a. C. a 1700 d. C. e caracterizou-se pela invenção gradual do simbolismo e pela resolução de equações por vários métodos, apresentando progressos pouco importantes até à resolução geral de equações cúbicas e quárticas.

Importa referir que o desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios:

i) Retórico (verbal), caracterizado pela ausência de simbologia e pela descrição de problemas por texto;

ii) Sincopado (no qual eram utilizadas abreviações de palavras). Nesta fase iniciada por Diofanto, as incógnitas são substituídas por letras mas não existe a procura de um método convergente.

iii)Simbólico (desenvolvido a partir dos trabalhos de Viete). A Álgebra é dotada de um simbolismo próprio e deixa de ser uma ferramenta para resolver problemas. O objecto de estudo da álgebra passa a ser a sua própria estrutura e não apenas os procedimentos. As letras passam a designar incógnitas e variáveis e desenvolve-se a noção de relação e função.

A álgebra surgiu no Egipto quase ao mesmo tempo que na Babilónia; mas faltavam à Álgebra egípcia os métodos sofisticados da Álgebra babilónica, bem como a variedade de equações resolvidas. Para equações lineares, os egípcios usavam o método de resolução que consistia numa estimativa inicial seguida de uma correcção final. Um método que mais tarde se apelidou de falsa proposição. A álgebra do Egipto, tal como na babilónia era retórica.

A Álgebra grega conforme formulada pelos pitagóricos e por Euclides era geométrica. Para eles "se uma linha recta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre toda linha é igual aos quadrados sobre as duas partes junto com duas vezes o rectângulo que as partes contêm", ou seja "$(a+b)^2= a^2+b^2+2ab$.

Alguns séculos depois o matemático grego, Diofanto deu um novo impulso à Álgebra seguindo os antigos métodos babilónicos. Diofanto introduziu um estilo sincopado de escrever equações. A fama deste matemático baseia-se na arte da aritmética e segundo esta, apresenta um engenhoso tratamento das equações indeterminadas, geralmente duas ou mais equações com diversas variáveis com uma infinidade de soluções racionais. São conhecidas como equações diofantinas embora não tenha sido o primeiro a ter sucesso na resolução. O trabalho dos Hindus com equações indeterminadas era superior ao de Diofanto. Estes resolviam equações quadráticas completando quadrados. No entanto, aceitavam números negativos e raízes irracionais. Um dos conhecimentos adquiridos pelos hindus era que uma equação quadrática (com raízes reais) tinha duas raízes.

A álgebra que entrou na Europa pela via de Fibonacci regrediu tanto em estilo como em conteúdo. O semi-simbolismo de Diofanto e Brahmagupta não estavam destinados a contribuir para uma eventual explosão da Álgebra.

O simbolismo moderno despoletou por volta de 1500. A melhor forma de demonstrar esse simbolismo foi o aparecimento e o aperfeiçoamento dos símbolos. Segundo Baumgaut (1994) o inventor do símbolo "=" em 1557 foi Robert Recorde por não acreditar que existiam coisas tão iguais como duas rectas paralelas. Por último no ano de 1545 o italiano Girolamo Cardano publicou o "*Ars Magna"*que continha as soluções para as equações cúbicas e a solução para as equações quárticas. Estas soluções representam o primeiro material realmente novo desde a antiguidade e, embora essencialmente gerais, foram obtidas por “artifícios engenhosos” do que por avanços no sentido da compreensão e teorização.

A Álgebra é um ramo da matemática que trabalha com símbolos, relações entre números e estruturas. O seu progresso e crescimento têm influenciado matemáticos, educadores e investigadores que por sua vez, têm tido um papel preponderante nas mudanças do ensino da Álgebra.

Perspectivas da Álgebra escolar

Ao longo dos anos, o ensino e aprendizagem da Álgebra tem merecido um lugar de destaque por parte de investigadores. Em matéria de educação matemática, reconhecem-se diferentes concepções do modo como a Álgebra é ensinada nas escolas. Para Bednarz, Kieran & Lee (1996), a introdução da Álgebra escolar pode tomar diferentes rumos: As regras para a resolução de equações (que grande parte do ensino reduz a Álgebra), a resolução de problemas específicos, a generalização de leis de formação, mais recentemente a introdução do conceito de variável e função e o estudo de estruturas algébricas marcaram o currículo nos anos 60 sob influência da matemática moderna. Inúmeros estudos evidenciam que as dificuldades dos alunos de diferentes escolas estão de certa forma relacionadas à forma como se introduz a Álgebra escolar. Kieran (2007), refere que grande parte da investigação, conduzida no período que precede os anos 90, foca especialmente as transições dos alunos de treze ou catorze anos, na medida que estes passam da Aritmética para o estudo da Álgebra. Stacey, Chick & Kendal (2004) referem que se a Álgebra é interpretada somente como uma manipulação simbólica, então terá pouca relevância no dia-a-dia. Este facto pode representar um motivo de alienação por parte dos alunos na aprendizagem da Matemática. Há necessidade de tornar relevante para os alunos o significado da Álgebra e para os professores, o desenvolvimento de ideias claras sobre o que realmente significa a Álgebra, para além da manipulação simbólica. Este tem sido o mote para várias investigações e para a evolução dos currículos. Sobre a Álgebra no Programa de Matemática do Ensino Básico, Oliveira (2009) menciona que a ancoragem do programa na promoção do pensamento algébrico vai ao encontro de múltiplas investigações e orientações curriculares internacionais, e expressa igualmente um interesse que se tem vindo a manifestar no nosso país. Para a autora, o pensamento algébrico é a pedra de toque deste programa, no que diz respeito ao grande tema da Álgebra, marcando uma diferença substancial relativamente aos programas do ensino básico anteriores, nas seguintes ideias: i) os alunos podem começar a pensar algebricamente mais cedo no seu percurso escolar; ii) a capacidade de generalização é um aspecto central na Álgebra e na Matemática, em geral, que ganha em ser promovida desde as etapas iniciais do ensino básico; iii) a utilização do simbolismo algébrico deve ser progressiva, sendo que as múltiplas representações têm um papel importante nesse contexto; iv) deve existir uma forte articulação e continuidade entre os vários tópicos da Álgebra.

Kieran (2006) identifica três grupos temáticos que enquadram as principais linhas de investigação didáctica da Álgebra: i) Transição da Aritmética para a Álgebra; ii) Utilização de ferramentas tecnológicas e foco na representação e generalização; iii) Pensamento algébrico dos alunos no ensino básico;

O primeiro grupo temático, concentra a sua atenção na transição da Aritmética para a Álgebra. Os alunos realizam trabalho algébrico utilizando regras aprendidas na Aritmética. Van Ameron (2003, in Nabais, 2010) conclui que os alunos usaram as equações como forma de estruturar o seu raciocínio na resolução de problemas. Stacey e McGregor (1999, in Nabais 2010) observaram que em cada etapa de resolução de problemas, os alunos privilegiavam os métodos aritméticos em detrimento dos algébricos. O segundo grupo temático, investiga a utilização das novas tecnologias como ferramentas úteis na aprendizagem da Álgebra, o que segundo Nabais (2010), originou uma mudança nos papéis dos participantes na sala de aula, tornando-se, os alunos mais activos e intervenientes. Filloy, Rojano & Rubio (2001, in Nabais, 2010), afirmam que a folha de cálculo funciona como uma ponte para a Álgebra, na medida em que auxilia os alunos a criar significados conceptuais para os objectos e para as operações algébricas.

Na década de 90 surge o terceiro grupo temático, em que o foco de atenção se centra no pensamento algébrico. Para Kieran (2004), o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino básico envolve o recurso a tarefas onde símbolos e letras algébricas podem ser usados como ferramentas. Para Kaput (1999), o pensamento algébrico manifesta-se quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. O autor considera que os alunos devem explorar situações aritméticas para chegar à expressão e formalização de generalizações e trabalhar com regularidades numéricas para descrever e generalizar relações funcionais.

Ponte, Branco & Matos (2009) afirmam que o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas, (Quadro 1).

Quadro 1- Vertentes fundamentais do pensamento algébrico (Ponte *et al*., 2009, p.11)

Representar	Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	Relacionar (em particular, analisar propriedades); Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Para Ponte *et al.* (2009), a primeira vertente, representar, diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica. Na segunda vertente, raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente, assumem especial importância o relacionar (em particular, analisando propriedades de certos objectos matemáticos) e o generalizar (estabelecendo relações válidas para uma certa classe de objectos). Tal como nos outros campos da Matemática, um aspecto importante do raciocínio algébrico é o deduzir. Finalmente, na terceira vertente – resolver problemas, que inclui modelar situações, trata-se de usar representações diversas de objectos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Assim, reflectir de acordo com esta perspectiva do pensamento algébrico e da Álgebra, consolida a ideia de que a Álgebra não se reduz à manipulação simbólica. O ensino e aprendizagem da Álgebra vão muito para além do trabalho com o simbolismo formal. Assim, na aprendizagem da Álgebra o aluno deve ser capaz de pensar algebricamente, em diversas situações e não reduzir o seu trabalho à manipulação simbólica. Desta forma, como argumento para defender a inclusão do pensamento algébrico no currículo de Matemática dos primeiros anos pode evocar-se, não só o seu carácter preparatório para a Álgebra dos anos posteriores, mas também o seu contributo para o aprofundamento da compreensão da matemática e do poder desta área do saber, Canavarro, (2009).

Símbolos e Variáveis

A maioria dos símbolos utilizados nos primeiros anos de escolaridade, pelos alunos em Aritmética, é novamente utilizada na aprendizagem da Álgebra. Os mesmos símbolos têm no entanto, significados diferentes na aprendizagem da Álgebra. O sinal de igual, o sinal de mais ou menos e as letras são alguns exemplos a considerar. Quando os alunos iniciam o estudo da Álgebra estão sujeitos a uma nova compreensão destes símbolos. A pouca articulação da Álgebra com a Aritmética tende a ser um obstáculo para uma melhor aprendizagem algébrica. Canavarro (2009) refere que uma abordagem algebrizada da Aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da Álgebra em anos posteriores. Arcavi (1994, 2006) sugere que, tal como no ensino da Aritmética se tem em vista o desenvolvimento do *sentido do número*, também no ensino da Álgebra se deve visar o desenvolvimento do *sentido do símbolo*, sendo que este aspecto é bastante importante na aprendizagem deste domínio. O *sentido do símbolo* não tem uma definição única e precisa, pelo que, cada autor esclarece o que entende por este termo, havendo vários pontos comuns.

Zorn (2002, in Branco, 2008) define *sentido do símbolo* como sendo uma capacidade muito geral de extrair significados e estruturas matemáticas dos símbolos, para atribuir um significado eficiente aos símbolos e para manipulá-los para descobrir novos significados e estruturas matemáticas. Ou seja, *sentido do símbolo* refere-se, essencialmente, à capacidade de dar significado a símbolos, a expressões e a fórmulas e a ter uma compreensão da sua estrutura.

Para Arcavi (2006), o *sentido do símbolo* envolve diversos aspectos: (i) compreensão dos símbolos (quando e como podem e devem ser usados para exibir relações, generalizações e demonstrações) e sentido estético do seu poder; (ii) capacidade tanto de manipular como de ler através de expressões simbólicas; (iii) consciência que é possível exprimir informação dada ou desejada através de relações simbólicas; (iv) capacidade de seleccionar uma representação simbólica e de melhorá-la se necessário; (v) consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a realização de uma tarefa, tendo em conta a nossa intuição e o contexto do problema; (vi) consciência que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis em diferentes contextos. Trata-se, claramente, de um conhecimento complexo que requer múltiplas e variadas experiências de aprendizagem ao longo de um percurso escolar de vários anos.

Zorn (2002) refere-se ao sentido de símbolo, de um modo geral, como sendo a capacidade de dar significado e compreender a sua estrutura enquanto para Arcavi, o sentido de símbolo envolve diversos aspectos. Os dois autores acordam, que o sentido de símbolo se baseia na compreensão e na capacidade de dar significado. Zorn (2002) defende que para compreender é necessário, primeiro dar significado enquanto Arcavi (2006) defende que é necessário compreender primeiro e depois dar significado. Ainda sobre o sentido de símbolo, Arcavi (2006) salienta a necessidade de rever os significados dos símbolos e alerta para o significado dos mesmos em diferentes contextos.

No painel " Ensino Aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios?", quando questionado sobre o *symbol sense,* Arcavi (2006, p. 363) refere:

> (…) se os símbolos são o instrumento principal da Álgebra, podemos concentrarmo-nos no *symbol sense* em relação com a noção geral de "sense making", criação de significados em geral e não somente na álgebra. De alguma maneira o *symbol sense* é um caso específico de algo que me preocupa muitíssimo e que é o "sense making" em Matemática. Eu penso que a chave do divórcio entre os nossos alunos e a Matemática, se deve a esse corte entre os significados e o formalismo.

A noção de equilíbrio é importante para a compreensão do conceito de equação. É aqui que também surgem dificuldades na compreensão da mudança do símbolo =. Os alunos estão habituados a interpretar o símbolo "=" como indicador de uma operação que é necessário efectuar, por exemplo, 3+2= .

Em Álgebra este símbolo tem um significado completamente diferente. $x + 2 = 3$ Define uma condição onde x satisfaz um valor para a igualdade. É fundamental que os alunos se apropriem da mudança que este símbolo traz ao estudo das equações para que deste modo, se minimizem as dificuldades e os erros inerentes à resolução de equações.

É usual os alunos não olharem para o sinal de igualdade de equações como um símbolo de equivalência entre o lado esquerdo e o lado direito da equação, mas sim interpretá-lo como um sinal para começar a calcular, desta forma não é pacifico para um aluno no 7.º ano de escolaridade que $3x+8 = x - 4$, pois para ele o lado direito deveria indicar uma resposta. Kieran (1981) refere que apresentando o sinal de igual, desde o início como um símbolo indicativo de "equivalência" entre igualdades Aritmética pode amenizar essa dificuldade.

Filloy e Rojano (1989), classificam as equações de 1.º grau com uma incógnita em duas categorias, consoante a presença da incógnita num ou em ambos membros da equação. Às equações que podem ser escritas na forma $x + a = b$ ou $ax + b = c$ classificam de "equações do tipo aritmética" e às equações que se podem reduzir à forma $ax + b = cx$ ou $ax + b = cx + d$ de "equações do tipo algébrico". Kieran (1981) refere a possibilidade de, nas equações de tipo aritmético, os alunos ainda entenderem o sinal de igual como sinal operacional, em que a expressão do 1º membro deve ser operada de modo a obter o resultado do 2º membro. A resolução deste tipo de equações pode facilmente ser realizada recorrendo à utilização de operações inversas, o que não acontece nas equações do tipo algébrico cuja resolução implica a utilização de regras de manipulação mais complexas. Filloy e Rojano (1989), apontam para a possível existência de um *corte didáctico* na passagem da resolução de equações aritméticas para equações do tipo algébrico. Se efectivamente chegam à solução nas "equações aritméticas" operando no 1º membro, certamente quando confrontados com "equações algébricas" tentarão inicialmente operar sobre o primeiro membro na tentativa de obter o 2.º membro e desta forma experimentando a dificuldade.

Outro símbolo que requer uma diferente concepção por parte dos alunos é o sinal de menos. Kieran (2007), afirma que o sinal de menos e as diferenças subtis com este sinal, usado nas expressões algébricas e nas equações, constitui um factor gerador de dificuldades nos alunos. A necessidade do *conhecimento da negatividade,* referido num estudo por Vlassis (2004), o autor confere a capacidade de interpretar o sinal de menos em três vertentes: i) sentido binário, como operação binária; ii) sentido unário, segundo o qual subtrair 3, significa menos 3; e iii) sentido de simetria, que permite, na equação –

$x = 1$, identificar $–x$ como o simétrico de x. Os resultados do seu estudo levam a concluir que as várias interpretações do sinal menos são contra intuitivas para a maioria dos alunos que iniciam o estudo em Álgebra e que a perspectiva binária levanta menos dificuldades aos alunos do que as interpretações do sinal nos sentidos unário ou de simetria.

Ponte, Branco & Matos (2009) referem que, desde a década de oitenta, têm sido discutidas diferentes visões da Álgebra e delinear o que deve ser incluído na álgebra escolar. A primeira visão da Álgebra, que a reduz à sua vertente simbólica, é conhecida como a *visão letrista*, em que o objectivo é aprender a manipular símbolos apenas através de treino e prática. A *visão estruturalista,* uma corrente centrada nas estruturas algébricas abstractas, surge apoiada nas propriedades das operações ou das transformações geométricas. Mais recentemente existe uma terceira visão, em que se procura dar ênfase aos significados que podem ser representados por símbolos e que procura promover o pensamento algébrico.

Ainda assim, é quando surgem as letras no ensino da Álgebra que os alunos mais sentem desconforto. Nos anos setenta, num estudo realizado no Reino Unido, Kuchemann, (1981) indicava diversas interpretações para as letras usadas em Álgebra:

i) *Letra como incógnita*, representando um número específico mas desconhecido, com o qual é possível operar directamente. Esta interpretação está intimamente relacionada com a resolução de equações como x+3=6, por exemplo.

ii) *Letra como número generalizado,* situação em que o aluno a vê como representante de vários números ou, pelo menos, como podendo ser substituída por mais do que um valor.

iii) *Letra como variável,* caso em que esta é vista como representante de um conjunto de valores e pode ser usada para descrever relações entre dois conjuntos.

Resolução de equações

Para os alunos compreenderem o conceito de equação é necessária a compreensão de vários aspectos. O sinal de igual e de número desconhecido são alguns dos conceitos que devem ser interiorizados de forma significativa por parte dos alunos. O conceito de número desconhecido pode começar a ser desenvolvido antes da aprendizagem formal da Álgebra. O PMEB (Ponte *et al*., 2007), explicita que no desenvolvimento dos conceitos e procedimentos algébricos é importante que sejam proporcionadas aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal. Também Linchevski (1995, p.117) sugere a realização de um trabalho pré-algébrico relativo ao tema equações que abranja as quatro áreas seguintes:

a) Desenvolver a noção de solução através de oportunidades para realizar a substituição de números por letras (verificação numérica);
b) Lidar com equações equivalentes através de substituição;
c) Construir esquemas cognitivos através de actividades reflexivas que permitam que os alunos usem os seus procedimentos espontâneos próprios;
d) Praticar a formulação de equações como uma actividade complementar para a resolução de equações.

Na resolução de equações, o PMEB (Ponte *et al*., 2007) refere que os alunos devem fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática. É omisso no PMEB (Ponte *et al*., 2007) a referência sobre as regras de resolução de uma equação de primeiro grau. Neste subtópico é permitido ao aluno abordar a resolução de equações, de uma forma mais aberta dando-lhe deste modo, a liberdade de escolher a melhor estratégia de resolução. De acordo com Branco (2008) na resolução de equações podem ser usadas diferentes estratégias de resolução, sendo que umas recorrem a situações de visualização e outras a abordagens numéricas. Em cada uma das situações encontram-se vantagens e desvantagens, pelo que, ao longo de toda a escolaridade os alunos devem ser confrontados com situações de aprendizagem que promovam o uso destas estratégias.

Kieran (1992) defende, que os alunos iniciantes na álgebra utilizam vários métodos intuitivos para resolver equações algébricas. Alguns desses métodos podem ajudar na percepção de equações e resolução de equações. Os alunos que são incentivados a usar inicialmente o método tentativa e erro desenvolvem uma melhor noção de equivalência entre os dois lados da equação e são mais tarde bem sucedidos na aplicação de métodos mais formais. Em contrapartida, os alunos que são ensinados a resolver equações por métodos formais podem não entender o que estão a fazer. Os alunos que são ensinados a utilizar o método da "transposição" aplicam mecanicamente o facto - muda de lado, troca de sinal.

Kieran (2006) refere três abordagens à resolução de equações, no início do estudo da Álgebra: i) abordagem intuitiva, que inclui estratégia relativa às propriedades dos números, a estratégia de contagem e a estratégia de *cover up*; ii) Abordagem de substituição por tentativa-erro, e iii) abordagem formal.

As várias estratégias a que Kieran (1992) chama de métodos para resolver equações estão resumidas no Quadro 2.

Quadro 2- Estratégias de resolução de equações (Kieran, 1992)

	Estratégia	Exemplo
a)	*Uso da Realidade*	3 + n = 5 ; 5-3=2, logo n=2
b)	*Técnicas de contagem*	3+n=5, os alunos podem contar 3,4,5, logo são necessárias duas unidades para ir do três ao cinco.
c)	*Cobertura (Cover-up)*	$2x + 9 = 5x$; $2x + 9 = 2x + 3x; 9 = 3x$
d)	*Desfazer (Undoing)*	$2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x = 18 - 4 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 14 \div 2 \Leftrightarrow x = 7$
e)	*Tentativa e erro*	$2x + 4 = 18$; para $x = 5, vem$ 14=18, o que não é verdade; para $x = 6$, vem 16=18, o que não é verdade; para $x = 7$, vem 18=18, logo $x = 7$.
f)	*Transposição* (Mudar de membro, mudar de sinal)	$2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x = 18 - 4 \Leftrightarrow 2x = 14$
g)	*Realização da mesma operação em ambos os membros*	$\mathbf{2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x + 4 - 4 = 18 - 4 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow 2x/2 = 14/2 \Leftrightarrow x = 7}$

De acordo com o PMEB (Ponte *et al*., 2007), em vigor nos primeiros anos de escolaridade, não há referência às equações. Mesmo assim o professor pode proporcionar experiências de aprendizagem que proporcionem aos alunos a resolução de equações utilizando estratégias informais, como a contagem ou o uso de propriedades conhecidas dos números. Por exemplo, resolver a equação 5+ *n* =8 ou sem utilizar a letra *n*, 5+__ = 8. Neste caso os alunos utilizam os conhecimentos anteriores da adição, 5 mais 3 é igual a 8 e utilizando os conhecimentos relativos às propriedades dos números determinam facilmente o valor da incógnita, n=3. A mesma equação pode ser resolvida usando a estratégia de contagem, 5, 6, 7, 8. Os alunos verificam que do 5 para chegar ao 8, têm de contar três números (Kieran, 1992).

Outra estratégia bastante informal é a realização de substituições por tentativa e erro. Nesta estratégia, os alunos substituem a incógnita por vários valores, até encontrarem ao valor que torna a expressão numa proposição verdadeira. Por exemplo, na equação $2x + 5 = 13$ podem experimentar valores tais como, 2, 6 e depois o 4 (Kieran, 1992). Esta estratégia exige algum conhecimento das propriedades dos números pois se a tentativa e erro se basear em experimentação aleatória a resolução pode tornar-se morosa e fastidiosa. É necessário que os alunos tenham uma boa noção das propriedades dos números pois esta estratégia permite, ao mesmo tempo, confirmar a validade de uma solução que é determinada pelo método formal. A mesma autora refere que os alunos que adoptam este método no início da aprendizagem da resolução de equações, têm mais desenvolvida a noção de equilíbrio entre o lado direito e o lado esquerdo da equação e do papel de equivalência do sinal de igual, do que os alunos que nunca adoptaram esta estratégia na resolução de equações.

As estratégias para resolver equações pelos métodos *cover up* e desfazendo as operações revelam-se como estratégias mais sofisticadas e são vistas pelos alunos como uma sequência de equações. Numa primeira situação, estas apenas contêm uma operação, como por exemplo, $n + 17 = 21$, e coloca questões como “que número mais 17 dá 21?”. A partir desta ideia o aluno poderá pensar que 21 -17 é igual a 4, chegando deste modo à solução da equação. Recorrendo a esta técnica a determinação do valor desconhecido não passa por pensar na adição, mas na subtracção. Numa segunda fase as equações do tipo $2 \text{ x } n + 5 = 47$, os alunos colocam questões como “que número mais cinco dá 47?”. Ao obterem 42 questionam “duas vezes que número dá 42?” e obtêm assim a solução da equação inicial que é 21 como resposta final. A investigação desta autora relaciona o método e os procedimentos formais na resolução de equações. Confere que os alunos que aprendem a resolver equações segundo este método antes de aprender as técnicas formais têm mais sucesso neste domínio que os alunos que aprendem técnicas formais. Quando os alunos adoptam o método de ”andar para trás” acabam por pensar nas operações inversas. Por exemplo, quando resolvem por este método a equação $2x + 4 = 18$, os alunos tomam o valor numérico 18 e realizam as operações inversas às indicadas no lado esquerdo, isto é, fazem 18 -4 = 14, e de seguida realizam a operação inversa à multiplicação por 2 e fazem 14÷2 =7. Assim, operam exclusivamente com números e evitam abordar a equação como uma estrutura matemática de equivalência (Kieran, 1992).

Ainda sobre os outros dois métodos que a autora apresenta, de cunho mais formal, a transposição e a realização da mesma operação em ambos os membros, a autora defende que as operações inversas que são realizadas no método relativo à realização das mesmas operações em ambos os lados da equação são bastante diferentes das usadas quando se realiza a transposição. Apesar de, por vezes, a estratégia da transposição ser considerada uma versão mais reduzida da realização da mesma operação em ambos os membros da equação, estas duas estratégias não têm o mesmo significado para os alunos que iniciam o estudo da Álgebra. Kieran (1988, p. 95) salienta a diferença entre estes dois métodos de resolução de equações:

> O método de realizar em ambos os lados da equação uma operação que seja inversa a uma das operações dadas torna explícito o equilíbrio entre o lado esquerdo e direito da equação. Por outro lado, a justificação para realizar a mesma operação dos dois lados é precisamente para manter a equação equilibrada e para manter a sua solução inalterada ao longo do processo de resolução da equação. Além disso, este procedimento também envolve a simplificação dos lados esquerdo e direito da equação, em vez de só um lado, o que ocorre quando um dos termos é transposto para o outro lado.

De modo a tornar mais clara a abordagem à resolução de equações do 1.º grau, Filloy e Rojano (1989) sugerem a utilização de uma abordagem geométrica. Pretendem desta forma, dar sentido às equações dos tipos $ax \pm b = cx$ e $ax \pm b = cx \pm d\ e$ às operações algébricas usadas na resolução dessas equações. De acordo com esta abordagem, os alunos têm a possibilidade de transformar uma equação algébrica numa equação aritmética recorrendo à "manipulação geométrica". No caso particular de equações do tipo $ax \pm b = cx$, onde a, b e c são números inteiros positivos dados e, neste caso, $c> a$, esta pode ser interpretada como representando a situação em que a adição da área de um rectângulo de comprimento a e largura x com a área de um rectângulo de área b é igual à área de um rectângulo de comprimento c e largura x como mostra a Figura 1.

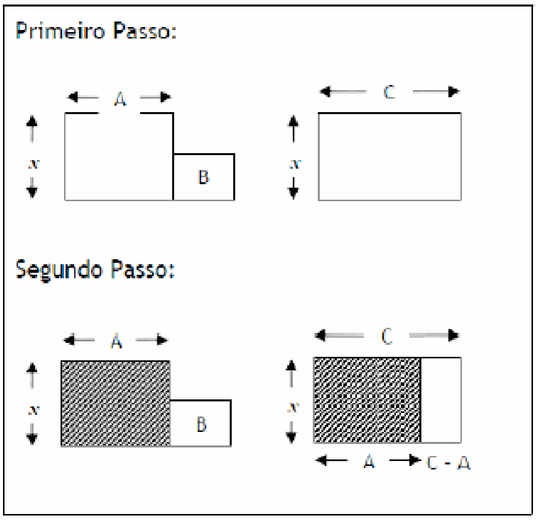


Figura 1- Abordagem geométrica na resolução de uma equação (adaptado de Filloy &Rojano, 1989, p. 21

Com este modelo, os alunos transformam uma equação algébrica numa equação de tipo aritmética, tendo a possibilidade de concluir a sua resolução com recurso à utilização de operações inversas.

Os mesmos autores sugerem ainda a utilização da balança com dois pratos equilibrados. A vantagem deste modelo assenta no facto de ter significado em diferentes situações do dia-a-dia e de os alunos poderem criar facilmente uma imagem mental da balança (van Ameron, 2002). Além disso, este método quando introduzido no capitulo das equações, salienta o conceito de equivalência presente nas mesmas. No entanto, este é um método limitado uma vez que a abordagem às equações que envolvam números negativos não é adequada. Warren e Cooper (2005, in Branco, 2008) estudam alunos cuja média de idades é oito anos com o objectivo de explorar a utilização do modelo da balança para a representação de equações e a determinação das incógnitas. Estes autores verificam que este modelo fez com que os alunos não se centrassem no significado do sinal de igual como indicando uma resposta mas que interpretem a equação como uma entidade. Todos os alunos representam em linguagem simbólica as indicações presentes no modelo da balança mostrando, assim, que a utilização deste modelo é eficaz. Neste estudo, a estratégia que mais adoptam é uma estratégia relativa ao isolamento da incógnita através da realização das operações inversas, seguida pelo uso de uma estratégia numérica. Na realização da equação ? – 4 = 13, dez alunos adoptam o modelo da balança e determinam correctamente a sua solução. Ao fazerem isto, Warren e

Cooper consideram que os alunos se "deslocam para além das limitações do modelo da balança" (p. 69). Esta conclusão é também suportada pelo facto de três alunos terem usado com sucesso esta estratégia para descobrir o valor da incógnita na equação ? + ? + 2 = ? + 5.

Erros e Dificuldades na Aprendizagem da Álgebra

Muitas das dificuldades dos alunos na resolução de equações surgem dos erros que cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência. Boa parte destas dificuldades tem a ver com o facto de os alunos continuarem a usar em Álgebra os conceitos e convenções aprendidos anteriormente em Aritmética. Verificam-se, também, dificuldades de natureza pré-algébrica, tais como a separação de um número do sinal "menos" que o precede.

Ao longo dos últimos anos diversas investigações têm contribuído para ajudar a perceber melhor as dificuldades e os erros mais comuns que os alunos cometem na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações de primeiro grau.

O quadro seguinte pretende sistematizar alguns erros e dificuldades analisados e catalogados por investigadores nesta área ao longo dos últimos anos.

Quadro 3- Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º Grau (adaptado de Ponte *et al.*, 2007)

Erro / Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma acção	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Uso de parêntesis	$3(x+2)=7x$ $\Leftrightarrow 3x+2=7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985

Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow 7x=9$	Kieran, 1985
Transposição incorrecta de termos	$16x-215=265$ $\Leftrightarrow 16x=265-215$ $30=x+7 \Leftrightarrow 30+7=x$ $3x+5=2x \Leftrightarrow 3x=2x+5$ $7x=x+8 \Leftrightarrow 7-8=x+x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição *(Redistribution)*	$-2x+5=8$ $\Leftrightarrow -2x+5-5=8+5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x-3=2x-4 \Leftrightarrow x=2x-4$	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$6x=24 \Leftrightarrow 6+x=24$ $11x=9x=11/9$ $2x=4 \Leftrightarrow$ *i)* $x=4-2$ *ii)* $x=\frac{4}{-2}$ *iii)* $x=\frac{2}{4}$ $-x=-17 \Leftrightarrow ??$ $-x=4 \Leftrightarrow ??$	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

A adição incorrecta de termos não semelhantes, é uma dificuldade que muitos alunos experimentam quando trabalham com equações ou expressões algébricas. Quando confrontados, por exemplo, com a equação 2x+3=11, o aluno considera o sinal "+" como um indicador de proceder a uma adição. Simplifica a equação 5x=11, adicionando incorrectamente monómios não semelhantes. De acordo com Ponte *et al* (2009), a interpretação da expressão algébrica do 1º membro e dos sinais "+" e "=", impede-o de conseguir resolver a equação de forma correcta. A interpretação do sinal "+" como indicador de uma adição algébrica e a compreensão do sinal "=" como indicador de uma relação de equivalência são aspectos que não surgem nos alunos de forma imediata.

Outra dificuldade que os alunos experimentam é a adição incorrecta de termos semelhantes. Por exemplo $-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$, neste caso as dificuldades transitam da Aritmética e comprometem desta forma a aprendizagem algébrica.

A transposição incorrecta de termos advém da generalização da "regra" – troca de membro troca de sinal e resulta da passagem de um membro para outro sem atender à alteração da operação inversa.

A redistribuição acontece na adição de números com sinais contrários a cada um dos membros de uma equação. O erro do uso do parêntesis resulta no não reconhecimento da propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição. A conclusão incorrecta da resolução de uma equação tem, maioritariamente, a sua origem em erros de troca de operação inversa. Não saber como começar a resolver uma equação é também uma dificuldade que muitos alunos se debatem. Por vezes, este facto, leva a estes criem a suas próprias regras e experimentem outro tipo de erros ou de dificuldades.

É um facto que os alunos tendem a preferir a manipulação simbólica, a criação das suas próprias "regras" que julgam ter compreendido. Isto leva a que cometam erros e experimentem dificuldades face à falta de entendimento no que concerne à resolução de equações. O professor tem um papel preponderante que é o de colmatar essas e outras falhas e consequentemente procurar estratégias para melhorar a aprendizagem.

Com base num estudo sobre as razões que levam os alunos a cometer determinados erros, Booth (1984) identifica três áreas principais em que os alunos manifestam dificuldades: i) a interpretação das letras; ii) a formalização dos métodos utilizados e iii) a compreensão de notações e convenções. Algumas das dificuldades identificadas pela autora são também evidenciadas noutros estudos (por exemplo, Kieran, 1989, 1992; Macgregor & Stacey, 1997, in Matos, 2007).

De acordo com Booth (1984, 1988, in Matos, 2007) os alunos parecem ter uma tendência para encarar os símbolos literais como representantes de números específicos, isto é, como incógnitas. A dificuldade, neste caso, surge na interpretação das letras de um modo mais abrangente ou na visão da letra como variável e por vezes os alunos têm dificuldade em entender que os valores assumidos por letras diferentes podem ser distintos. Esta tendência para a interpretação das letras como incógnitas pode ser, também, influenciada pelas experiências anteriores dos alunos no âmbito da Aritmética, onde o foco da actividade desenvolvida está, frequentemente, na determinação de uma resposta numérica particular. A utilização da letra como representante do metro (unidade) e não do número de metros (grandeza) de um determinado comprimento pode, também, ser um foco gerador de confusão para o aluno. Neste caso, a letra é entendida como um rótulo para uma certa entidade, faltando-lhe um referente numérico.

Esta interpretação incorrecta é favorecida quando, na resolução de problemas, são utilizadas as iniciais das designações dos objectos, o que leva o aluno a recordar-se dos objectos em si e não do número de objectos que a letra pretende representar. Por exemplo, usando *p* para representar um número desconhecido de peras abre-se caminho a que os alunos façam a associação incorrecta da expressão 3*p* a três peras em vez de a interpretarem como três vezes o número de peras.

De acordo com Matos (2007), outra área em que os alunos manifestam dificuldades é a formalização do método utilizado, observando-se o predomínio de raciocínios informais dependentes da situação em que são desenvolvidos que dificultam a formulação de generalizações. Booth (1984, in Matos, 2007) dá como exemplo a determinação do número de elementos em dois conjuntos, quando é conhecida a dimensão de cada um deles. A autora refere que se um aluno, perante esta tarefa, usa sistematicamente técnicas simples de contagem, sem a utilização explícita da noção de adição, é provável que sinta dificuldade em representar genericamente essa adição através de uma expressão como $x + y$.

Ainda Matos (2007) refere uma terceira área em que os alunos revelam dificuldades e relaciona-se com a compreensão de notações e convenções, que se manifesta de diversos modos nos desempenhos dos alunos em estudo. O primeiro sinal desta dificuldade é o facto de estes procurarem adicionar algebricamente termos que não são semelhantes, procurando terminar a resolução de qualquer problema com a apresentação de uma resposta sob a forma de um termo único como é habitual na Aritmética ou na Álgebra, quando se trata do produto de monómios. É o que sucede, por exemplo, quando os alunos escrevem $3 + 4n = 7n$ ou $2a + 5b = 7ab$.

Lima (2007) apresenta três conclusões incorrectas na resolução da equação $2x=4$. Os erros cometidos na resolução desta equação estão fortemente relacionados com erros de troca de operação inversa.

a) $x = 4 - 2$

b) $x = \frac{4}{-2}$

c) $x = \frac{2}{4}$

> Ainda que os alunos possam aplicar cegamente regras de manipulação ou procedimentos que julgam ter compreendido, a ocorrência de raciocínios erróneos revela ausência de compreensão do significado matemático de equação. Cabe ao professor identificar situações em tal acontece, e procurar estratégias de ensino que favoreçam o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa para os alunos e uma melhoria das suas práticas de ensino. (Nabais, 2010, p. 60)

Também Hall (2002) realizou um estudo com 246 alunos com idades compreendidas entre os doze e os dezasseis anos de idade com o objectivo de analisar e catalogar alguns erros cometidos na resolução de equações de 1.º grau. O quadro refere os principais erros referidos pelo autor, alguns dos quais já tinham sido referidos por Kieran (1992).

No Quadro 4 encontram-se sistematizados alguns erros cometidos pelos alunos na resolução de equações lineares. O erro da supressão leva ao desaparecimento de termos devido a simplificações efectuadas de forma incorrecta ou simplesmente a omissão de termos sem razão aparente. A troca de operação inversa é um erro onde o aluno utiliza a operação inversa da adição em vez de utilizar a operação inversa da multiplicação. Na redistribuição, adiciona-se números com sinais contrários de ambos os lados da equação. A troca de membros, enfatiza-se a passagem de um termo de um membro para o outro, sem atender à correspondente alteração da operação envolvida. A transposição incorrecta é uma generalização de uma "regra" que funciona numa situação idêntica a $\frac{x}{2} = 5 \Leftrightarrow x = 10$, enquanto que na omissão, não são efectuadas as mesmas operações em ambos os membros da equação. O erro catalogado como divisão em que o quociente é calculado de forma incorrecta e finalmente a ausência de estrutura, onde o aluno utiliza as suas próprias "regras" e que aparenta não compreender a expressão " fazer o mesmo em ambos os membros".

Quadro 4- Erros na resolução de equações lineares (adaptado de Nabais, 2010, p. 60)

Tipo de erro	Exemplo
Supressão	$3x - 3 + 2 = 12 - 3 \Leftrightarrow$ $x + 2 = 9$
Troca de operação inversa *(Other Inverse Error)*	$4x = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 4$
Redistribuição	$x + 37 = 150 \Leftrightarrow$

(redistribution)	$x + 37 - 10 = 150 + 10$
Troca de membros *(switching addends)*	$x + 37 = 150 \Leftrightarrow$ $x = 37 + 150$
Transposição	$\frac{x}{2} + 3 = 5 \Leftrightarrow x + 3 = 10$
Omissão	$5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow$ $6x + 2 - 2 = 3x + 12$
Divisão	$3x = 10 \Leftrightarrow x = 3{,}1$
Ausência de estrutura	$\mathbf{5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow}$ $\mathbf{3 + 2 = 3x - 8}$

Ainda um erro que acontece frequentemente consiste na adição de forma incorrecta de dois termos semelhantes, ignorando os sinais que precedem esses termos, dando origem a situações do tipo $-2x + 5x = 8 \Leftrightarrow -7x = 8$ (Kieran, 2006). Neste caso, ao adicionar incorrectamente os coeficientes o aluno demonstra uma dificuldade nas operações com números inteiros.

Um outro aspecto onde é visível a dificuldade dos alunos em lidar com a notação algébrica tem a ver com o uso de parêntesis. Booth (1984, in Matos, 2007), identifica como principais causas para o facto de os alunos não sentirem a necessidade do seu uso: (i) a crença de que o contexto do problema determina a ordem pela qual as operações devem ser efectuadas; (ii) o entendimento de que, na ausência de um contexto específico, a ordem das operações é feita naturalmente, da esquerda para a direita; ou (iii) a ideia de que será sempre obtido o mesmo valor, independentemente da ordem pela qual sejam feitas as operações.

Também Pesquita, em 2006, realizou um estudo onde procurou perceber os processos de raciocínio e eventuais dificuldades dos alunos de uma turma de 8.º ano quando trabalham com situações que envolvem o pensamento algébrico, incluindo as dificuldades e os erros mais significativos quando trabalham na simplificação de expressões algébricas e equações. Neste estudo a autora procurou estabelecer a aprendizagem da Álgebra através de duas perspectivas: a perspectiva processual e a perspectiva estrutural. A autora refere Kieran (1992) que distingue duas perspectivas da Álgebra: a processual e a estrutural. Na sua perspectiva, na Álgebra processual não se lida com a transformação de expressões algébricas, mas sim com a substituição de variáveis por números, realizando depois as correspondentes operações aritméticas. Por exemplo, se considerarmos a expressão 3x + y e substituirmos x e y por 4 e 5, respectivamente, obtemos primeiro 12+5 e o resultado final é 17. Outro exemplo consiste na resolução da equação $2x + 5 = 11$, com substituição de x por vários números até encontrar o valor correcto. Nestes exemplos, as operações realizadas são numéricas. Para a autora, a Álgebra estrutural diz respeito a um conjunto diferente de operações, que são realizadas, não com números, mas sim com expressões algébricas. Por exemplo, a expressão $3x + y + 8x$ pode ser simplificada, dando origem à expressão $11x + y$. A resolução da equação $5x + 5 = 2x - 4$ pode ser iniciada através da subtracção de $2x$ em ambos os membros, obtendo-se a equação equivalente $3x + 5 = -4$ e assim sucessivamente, até à determinação do valor de x. Nestes exemplos, os objectos operados são as próprias expressões algébricas, sendo o resultado obtido em cada etapa (e também no final) uma expressão algébrica.

Tendo como base a perspectiva de duas alunas, Pesquita, conclui que o desempenho destas alunas na Álgebra processual e estrutural é diferente. Uma das alunas tem facilidade na resolução de situações baseadas na perspectiva processual e bastantes dificuldades em situações que remetem para uma perspectiva estrutural. Por outro lado, a aluna que revela facilidade em ambas as perspectivas, revela-se uma entusiasta por situações que apelam à manipulação algébrica e resolução de equações. A aluna que revelou dificuldade na perspectiva estrutural revelou repetidamente os erros de eliminação na simplificação de uma equação de 1.º grau. Considera o sinal de + de cada expressão como uma operação a realizar como se estivesse perante uma situação Aritmética.

Resolução de Problemas

A resolução de problemas é recomendada no PMEB (Ponte *et al.*, 2007), mais particularmente nos objectivos gerais do ensino da Matemática. Neste contexto, os alunos devem ser capazes de:

- Compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
- Apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam;
- Monitorizar o seu trabalho e reflectir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;
- Formular problemas.

A resolução de problemas é uma das três capacidades transversais referidas no PMEB (Ponte *et al*., 2007). É vista neste programa como uma capacidade matemática fundamental, considerando-se que os alunos devem adquirir desembaraço a lidar com problemas matemáticos e também com problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia e de outros domínios do saber. Trata-se de ser capaz de resolver e de formular problemas, e de analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema:

> A resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. (Ponte *et al*., 2007, p. 8)

Para além de desenvolver a capacidade desenvolver problemas, a resolução de problemas visa também promover o raciocínio e a comunicação matemática, estes últimos constituem elementos essenciais dos objectivos de aprendizagem. Na resolução de problemas o professor deve proporcionar aos alunos a oportunidade de analisar e reflectir sobre as várias resoluções do mesmo problema. Desta forma, ao dar atenção aos raciocínios dos alunos, fomenta a comunicação e a linguagem matemática:

> Resolver problemas é fundamental para a construção, consolidação e mobilização de conhecimentos matemáticos dos diversos temas, em conexão com o raciocínio e a comunicação. Possuir a capacidade de resolver problemas matemáticos significa ser capaz de realizar com sucesso actividades como compreender o problema, identificando a incógnita e as condições; seleccionar as estratégias e os recursos apropriados e aplicá-los, explorando conexões matemáticas para superar dificuldades; e verificar soluções e rever processos. (Ponte *et al*., 2007, p. 62)

Segundo o NCTM (2007), a selecção adequada de problemas pode revelar-se particularmente valiosa no desenvolvimento ou no aprofundamento dos conhecimentos sobre importantes noções matemáticas. A resolução de problemas é sem dúvida uma experiência de aprendizagem a ser vivida pelos alunos. O contexto em que se inserem, permite ao aluno desenvolver os seus conhecimentos enquadrados com a matemática.

Pires (2001, in Esteves, 2010) afirma que um problema é uma tarefa com um objectivo bem definido e um método de resolução desconhecido. Já para Ponte (2005, p.8), um problema é uma tarefa fechada com elevado desafio, sendo fechada porque “nela é claramente dito o que é dado e o que é pedido”. A experiência do desafio que caracteriza o problema é a descoberta do caminho que conduz à resposta.

Carreira, Boavida, Oliveira & Santos (2008) referem a resolução de problemas como um “exercício disfarçado”, o problema de aplicação mais elaborado onde se pressupõe a utilização de conhecimentos adquiridos.

Na aprendizagem da Álgebra, nomeadamente das equações, a resolução de problemas pode ter lugar no início da aprendizagem, contudo, neste tópico, os alunos podem não estar preparados para resolver os problemas através de métodos algébricos socorrendo-se dos conhecimentos aritméticos que possuem.

Stacey e MacGregor (1999) verificam que os métodos algébricos para a resolução de problemas são pouco compreendidos pelos alunos. As suas experiências anteriores na resolução de problemas aritméticos promovem o desenvolvimento do cálculo, o que vai condicionar a sua compreensão de incógnita e o seu uso das letras, a sua interpretação do conceito de equação e os seus métodos de resolução de equações.

Para Bell (1996), a resolução de problemas na introdução da Álgebra pode tomar duas abordagens: a abordagem particular em que o objectivo é escrever e resolver a equação traduzida pelo problema e uma abordagem mais genérica onde a experiência de aprender todas as opções e estratégias são a base do problema. Para o autor a abordagem com maior potencial é aquela em que é dado um desenvolvimento geral.

Take a copy of Mixed Tables.

• Find the box showing $\boxed{\begin{array}{c}14\\21\\28\end{array}}$ Notice that 14 + 28 = 42 and 2 × 21 = 42

• Try the other box $\boxed{\begin{array}{c}28\\35\\42\end{array}}$ top / middle / bottom

Is it still true that T + B = 2 M?

Try a few more, in the same line. Try some similar boxes in other lines.
Try horizontal boxes also: does L (left) + R (right) = 2M? (middle)

• Try lines of 4 and 5 numbers. Write what you find. Use letters if you wish.

Figura 2 - Problema retirado de Bell (1996), p. 175

Neste exemplo, os alunos ao mudarem os elementos e a estrutura podem originar novos problemas.

Ainda neste capítulo, Bell (1996) refere que a investigação tem mostrado que os alunos encaram todas as questões em Álgebra com necessidade de alguma manipulação. Para evitar esta questão, no trabalho com equações é importante que os alunos percorram toda a actividade, iniciando com um problema, escrevendo uma equação, depois resolvendo-a e, finalmente, interpretando o resultado.

Bell (1996) propôs o seguinte problema aos alunos: Existem duas pilhas de pedras. A segunda tem mais 19 pedras do que a primeira. Qual o número de pedras de cada pilha? A maioria dos alunos resolveu o problema através da Aritmética. Chegaram correctamente ao resultado de 57 e 76. Ao trabalharem com o método algébrico, tomando x para a primeira pilha e x+19 para a segunda, obtiveram 2x+19=133, chegando à solução x=57. De seguida, pediu que tomassem para x o número de pedras da segunda pilha. Isto deu origem a $x-19+x=133 \Leftrightarrow x=76$. O objectivo foi mostrar a possibilidade de diferentes atribuições para x, observar as diferentes expressões e equações resultantes e assim evidenciar a relação entre a Álgebra e o problema.

Kieran (1992, in Reed, 2009) dá como exemplo o seguinte problema:

O Daniel foi visitar a sua avó que lhe deu $1,5. Ele comprou um livro que custou $3,20. Se lhe sobrou $2,30 quanto dinheiro tinha ele antes de visitar a avó?

A resolução de grande parte dos alunos de 6.º ano foi a seguinte: 2,30+3,20=5,50-1,5=4, (o sinal de igual não é utilizado como equivalência).

> Confesso que quando vi a solução não fazia a mínima ideia do que estavam a fazer ou até se a resposta estava certa. A resolução deles era diferente da minha. Eu resolveria utilizando a álgebra. Usaria um símbolo abstracto (…). (Reed, 2009, p.78)

Com a recente implementação do Programa da Matemática do Ensino Básico, a resolução de problemas passou a ocupar um lugar de destaque no ensino da Matemática. É natural que alunos e professores experimentem dificuldades na concretização deste objectivo. Guimarães (2005) refere que a resolução de problemas e o raciocínio e processos de pensamento matemático mais gerais são áreas nas quais o desempenho dos nossos alunos está longe de ser satisfatório. Para o autor, a apropriação generalizada de "novas" orientações curriculares e a sua concretização em aula, nomeadamente as de natureza metodológica, são processos difíceis e demorados. No entanto, é nesta batalha que emerge a reflexão sobre a nossa prática e o modo como implementamos os problemas em sala de aula.

Word Problems

Um dos aspectos fundamentais na aprendizagem da Álgebra diz respeito à transição da linguagem natural para a linguagem algébrica. Neste ponto, Kieran (1992) apelida de *word problems* e subdivide-os em três campos:

i) Problemas tradicionais
ii) Problemas de abordagem funcional
iii) Problemas de generalização, de resposta aberta.

Os *word problems* tradicionais referem-se à elaboração de uma equação que represente uma relação. Nesta situação, formula-se uma equação envolvendo incógnitas e operações de acordo com algumas relações matemáticas, procede-se à resolução dessa equação, isolando a incógnita por meio de alguma manipulação algébrica, e determina-se o valor da incógnita.

Os problemas de abordagem funcional que, apesar não serem muito diferentes dos tradicionais *word problems*, o seu modo de apresentação e a abordagem de resolução são diferentes. De um modo geral, as relações entre duas variáveis neste tipo de problemas são estabelecidas antes da resolução do problema em particular. A expressão que representa essa mesma relação funcional torna explícita a interpretação do problema.

Nos problemas de generalização, a letra assume o papel de variável em regras relativas a relações numéricas, como por exemplo, o problema "Mostra que a soma de dois números inteiros consecutivos é sempre um número ímpar".

Bednarz e Janvier (1996) referem a importância da resolução de problemas no desenvolvimento do pensamento algébrico e no ensino da Álgebra. Nos problemas aritméticos, os alunos podem raciocinar de dados conhecidos para desconhecidos directamente com um raciocínio aritmético ao passo que, a resolução de problemas algébricos requer um raciocínio com incógnitas. Estas autoras verificam que os alunos adoptam preferencialmente estratégias Aritméticas na resolução de *word problems* e manifestam dificuldades em usar as equações para resolver este tipo de problemas. Também neste sentido, van Ameron (2002) refere que a resolução de problemas, segundo duas abordagens diferentes, pode causar dificuldades. Os alunos têm dificuldade em reconhecer a estrutura do problema de modo a representá-lo simbolicamente. Podem reconhecer o procedimento aritmético para determinar a solução, mas não conseguem raciocinar com as incógnitas. Para além disso, tendem a esquecer os seus conhecimentos informais à medida que aprendem Álgebra.

Numa investigação conduzida por Matos (2008), numa turma com 27 alunos de idades compreendidas entre os treze e os dezasseis anos, desafiou alunos a trabalhar situações de carácter exploratório formulando problemas matemáticos no tópico das equações. Nesse mesmo estudo, a autora investiga o uso de linguagem algébrica na resolução de problemas e identifica que a resposta de uma aluna se baseia, sobretudo, na sua intuição sobre os efeitos das operações da adição e multiplicação decorrente das suas experiências anteriores em Aritmética. Na resolução de equações, consegue resolver equações do tipo aritmético por um processo intuitivo, mostrando compreender a noção de equação e reconhecer se um número é ou não solução, por substituição, no entanto, nesta fase, não consegue resolver equações do tipo algébrico. O processo de ensino e de aprendizagem engrandece com a utilização de tarefas de cunho exploratório.

Sobre a natureza das tarefas em sala de aula, Matos (2008, pp. 229-230) afirma:

> A resolução de tarefas com carácter exploratório e investigativo, envolvendo relações funcionais, e a sua discussão parecem assim ter contribuído de forma assinalável para o desenvolvimento de um significado mais rico da linguagem algébrica, nas suas diferentes utilizações, por parte dos alunos, promovendo o desenvolvimento do seu sentido de símbolo e a evolução do seu pensamento algébrico.
> As dificuldades que ocasionalmente continuam a manifestar comprovam, no entanto, que a compreensão dos fundamentos da álgebra é um processo lento, que não se esgota num só ano de escolaridade.

Capítulo 3

Proposta Pedagógica

Caracterização da Turma

A turma sobre a qual incide o presente estudo, pertence à escola EB 2,3 Vasco Santana situada na Ramada, uma localidade no Concelho de Odivelas na periferia de Lisboa. A turma D do 7.º ano é constituída por 28 alunos, quinze rapazes e treze raparigas. A faixa etária destes alunos situa-se entre os onze e os treze anos de idade no início do ano lectivo de 2010/2011.

Quadro 5 – Idade dos alunos

Idades	Nº de alunos
11	14
12	9
13	5

A turma sobre a qual incide este estudo foi formada de raiz, sendo que a maioria dos alunos são provenientes de diferentes turmas do 6.º ano. No entanto, há cinco alunos com retenções em anos anteriores e alguns destes frequentam o 7.º ano pela segunda vez. A proveniência de diferentes turmas é notória nos métodos de trabalho e nos conhecimentos que apresentam. Existem alunos melhor preparados na resolução de problemas, outros na destreza de cálculo e outros evidenciam melhores conhecimentos em determinadas áreas matemáticas.

Os alunos desta turma são interessados e bastante participativos. Olham para as tarefas matemáticas como desafios a ultrapassar e têm gosto em superar esses mesmos desafios. No entanto, há alunos para os quais os desafios são competições em que o objectivo é terminar o mais rapidamente, facto que por vezes os prejudica pois resistem em escrever e justificar os seus raciocínios. É algo que tem vindo a ser melhorado pois já demonstram evidências em trabalhar a pares deixando de lado o individualismo que os caracterizava no início do ano lectivo.

No final do primeiro período, o conselho de turma considerou a turma com um comportamento regular e com bom desempenho na disciplina de Matemática.

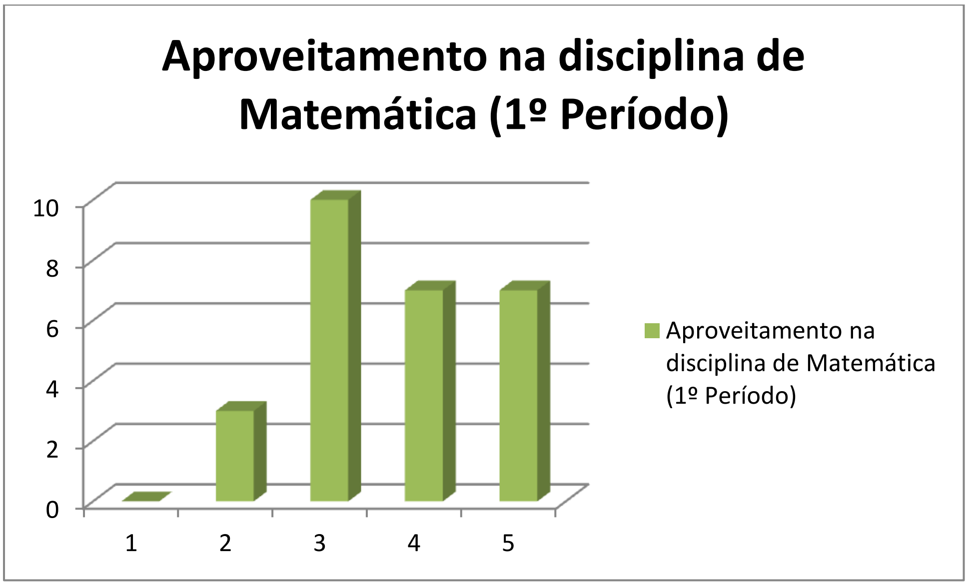


Gráfico 1- Aproveitamento em Matemática (1º Período)

Como se pode observar pelo gráfico 1, mais de metade da turma obteve nível 4 ou 5 no final do 1.º período. Ainda assim, foram propostos planos de recuperação a cinco alunos desta turma que obtiveram nível 2 e alguns, nível 3.

No inicio do 2.º período, a turma recebeu um novo aluno proveniente de outra escola que depressa se adaptou à sua nova turma.

Enquadramento Curricular

Em consonância com o plano anual da escola EB 2,3 Vasco Santana elaborado pelo departamento de Matemática, o tema das equações teria lugar no 3.º período do ano lectivo de 2010/2011. Este ano lectivo, o 3.º período tem o seu inicio a 26 de Abril de 2011, pelo que a minha intervenção decorreu entre 9 de Maio e 23 de Maio 2011.

Quadro 6 - Aulas previstas no Tópico "Equações"

Tópicos e Subtópicos	Objectivos Específicos	Notas	Datas
Álgebra **Equações** Equações do 1.ºgrau a uma incógnita Equações literais	Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes.	Relacionar os significados de "membro" e "termo", e de "incógnita" e de "solução" de uma equação. Distinguir "expressão algébrica", "equação" e "fórmula". Propor a resolução de equações simples, antes da utilização de regras.	9 de Maio a 16 de Maio (3 aulas)
	Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução.	Na resolução de equações do 1.º grau, incluir casos em que: – A incógnita está presente num ou em ambos os membros da equação; –É necessário desembaraçar previamente de parênteses. Quando os coeficientes são fraccionários tratar casos como x $(2/3)x+5=2x$ ou $(-1/3)x+3=(5/2)x$	16 De Maio a 18 de Maio (3 aulas)
	Resolver equações literais em ordem a uma das letras.	Propor a resolução de equações literais como $F = (9/5)\ C+32$ em ordem a C.	23 de Maio (2 aulas)

Estratégias e Recursos

Ao longo da minha intervenção pretendia proporcionar aos alunos experiências diversificadas, enriquecedoras e facilitadoras de aprendizagem. Neste sentido, como introdução ao tema das equações pretendia fazer uma abordagem exploratória com recurso à balança. Na minha opinião, a balança é passível de traduzir a noção de equilíbrio, podendo facilitar o entendimento do conceito de incógnita. Ao pedir aos alunos que descubram o peso de um item desconhecido, retirando ou acrescentando pesos nos pratos da balança, penso que facilmente poderão passar do concreto para o abstracto. A grande dúvida era se todos os alunos reconheceriam uma balança de pratos.

Como a escola possui uma balança, considerei importante que na sala de aula os alunos tivessem oportunidade de manipular este instrumento e assim tomar contacto com este recurso.

Previ que os alunos tivessem oportunidade de trabalhar a pares ou em pequeno grupo, pois a discussão e a troca de ideias facilita a apropriação de conceitos e estratégias.

Lembrando que este estudo incide em particular na compreensão dos erros que os alunos cometem na simplificação de equações de primeiro grau, pretendi aproveitar resoluções erradas de alunos, pois acredito que o erro é uma forma de aprendizagem. "A actividade metacognitiva do aluno acontece quando ele toma consciência dos seus erros e da sua maneira de se confrontar com os obstáculos. Cabe ao professor construir contextos favoráveis para que tal aconteça.", (Santos, 2002, p. 4)

"O objectivo é que o aluno seja ele próprio capaz de fazer a sua autocorrecção, sendo para isso necessário compreender o erro para criar condições para o ultrapassar" (Hadgi, 1997, in Santos 2002 p. 3). Quando o próprio consegue identificar o erro e corrigi-lo, acontece aprendizagem. Cabe ao professor interpretar o seu significado, formular hipóteses explicativas do raciocínio do aluno, para o poder orientar.", (Santos, 2002, p.3).

O erro está frequentemente associado à dificuldade. As dificuldades sentidas pelos alunos, na resolução de equações, condicionam o seu desempenho na resolução de problemas que envolvem equações.

A resolução de problemas surge no Programa como capacidade transversal e é vista de acordo com o Programa de Matemática, como uma capacidade matemática fundamental. A resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos (Ponte *et al*., 2007). No enquadramento curricular não refiro a resolução de problemas como um tópico a leccionar. Acredito que a resolução de problemas está intimamente relacionada com os tópicos referidos. Assim, procurei desenvolver a resolução de problemas em diversas aulas pois "tarefas que exigem que os alunos pensem conceptualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem", (Stein & Smith, 1998, p. 2).

De acordo com as tarefas e os seus objectivos, procurei que os alunos desfrutassem de experiências agradáveis, que ao mesmo tempo constituíssem momentos de partilha, discussão de ideias e aprendizagens significativas com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Conceitos matemáticos

As definições e conceitos matemáticos cumprem, hoje, um papel fundamental no processo de ensino e de aprendizagem. De acordo com Miguel (2006), o conhecimento matemático não se consolida com um rol de ideias prontas a ser memorizado; muito além disso, um processo significativo do ensino da Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma variedade de ideias e o estabelecimento de relações entre conceitos de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências e o modo natural de envolvimento para o desenvolvimento das noções matemáticas com vista à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade. O autor acrescenta ainda que é preciso avançar no sentido de conduzir as crianças a perceberem a evolução das ideias matemáticas, ampliando a compreensão que delas se tem. É este o meu objectivo em propor tarefas exploratórias. Neste sentido, pretendo que os alunos construam o seu próprio conhecimento, que organizem ideias e, que eles próprios, com a minha orientação, cheguem às definições matemáticas necessárias à compreensão deste tópico das equações. Para saber Matemática é indispensável conhecer as suas definições e saber utilizá-las adequadamente. No quadro abaixo, refiro os conceitos relevantes neste tópico:

Quadro 7: Conceitos matemáticos no tópico das equações

Uma **equação** é uma igualdade entre duas expressões matemáticas onde figura pelo menos uma incógnita.
Uma equação tem sempre duas partes separadas pelo sinal de igual (=). Cada uma dessas partes diz-se **membro da equação**: a que fica à esquerda do sinal é o **primeiro membro** e a que fica à direita é o **segundo membro**.
Termos semelhantes são termos que têm a mesma parte literal. Para simplificar os membros de uma equação, podem adicionar-se os termos semelhantes.
Os valores da incógnita que transformam a equação numa igualdade verdadeira dizem-se **soluções** ou **raízes** dessa equação.
Equações com o mesmo conjunto-solução dizem-se **equivalentes**.
1.º Princípio de equivalência: Se se adicionar (ou subtrair) a ambos os membros de uma equação um mesmo número, obtém-se uma equação equivalente à dada.

2.º Princípio de equivalência:
Se se multiplicar ou dividir ambos os membros da equação por um número qualquer, diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à inicial.

Na construção destes conceitos foi importante a comunicação e o desenvolvimento do raciocínio efectuado pelos alunos, que agiram e reflectiram sobre a realidade que os rodeia.

Tarefas e Planificação

Para esta unidade didáctica, procurei ter um cuidado especial na escolha das tarefas a propor aos alunos. Foi sem dúvida o aspecto mais moroso e merecedor de reflexão mais profunda. A primeira tarefa, a meu ver, é a mais importante, pois é aquela que vai deixar a primeira marca nos alunos sobre o tópico a trabalhar. Por isso, exigiu muita reflexão, principalmente, porque tinha duas ideias concretizáveis. A primeira, que a tarefa fosse baseada na balança de dois pratos. Desta forma, os alunos teriam oportunidade de explorar o conceito de equilíbrio, tirar ou colocar pesos e simultaneamente descobrir o peso desconhecido, para assim iniciar o trabalho com a incógnita. A segunda ideia consistia em iniciar o tópico com a abordagem de problemas numéricos e posteriormente problemas geométricos. Esta ideia possibilitaria aos alunos entender gradualmente o conceito de incógnita e, consoante os problemas escolhidos, talvez pudessem entender a utilidade das equações no capítulo da Álgebra.

Após alguma reflexão, conclui que a primeira ideia, as balanças, representava uma aprendizagem mais enriquecedora e pus de lado a segunda, pois não me permitia trabalhar de imediato alguns conceitos que eram importantes, nomeadamente o de equilíbrio e os princípios de equivalência.

Uma outra preocupação, com as tarefas em geral, foi tentar equilibrar a origem das tarefas. Ter presente que o manual oferece tarefas exploratórias de grande interesse e nem sempre é necessário arquitectar novas tarefas quando por vezes estão mesmo ao nosso lado. O quadro abaixo, resume as tarefas e os objectivos de cada uma delas.

Quadro 8: Tarefas propostas

Tarefa	Objectivos	Estratégia
"Uma questão de peso"	Compreender a noção de equilíbrio na balança	Trabalho a pares e discussão em grupo.
"O peso certo"	Compreender a noção de equilíbrio na balança/equação Resolver equações com recurso à balança	Trabalho a pares e discussão em grupo.
"O peso desconhecido das gomas"	Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes Compreender o significado de termo, membro, incógnita e solução de uma equação Compreender os princípios de equivalência	Trabalho a pares e discussão em grupo.
Resolução de equações (Manual)	Resolver equações Formalizar a resolução de equações	Trabalho individual e correcção no quadro.
Problemas propostos (Manual)	Traduzir da linguagem natural para linguagem matemática Resolver equações Interpretar a solução da equação no contexto do problema	Trabalho individual e correcção no quadro.
Truque de Magia	Escrever e resolver a equação que traduz o problema	Discussão em grupo.

A primeira tarefa foi retirada do manual – "Uma questão de peso (ver anexo 1) e designei que a tarefa fosse realizada a pares. Esta tarefa permitiu um importante trabalho de cálculo mental e uma primeira introdução aos princípios de equivalência. Exigiu também que os alunos explicitassem os raciocínios utilizados e que justificassem cuidadosamente as opções tomadas. Dei importância à comunicação matemática, capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina. Esta tarefa foi complementada com alguns exercícios (ver anexo 2), em que se apresentavam balanças de dois pratos e o objectivo era descobrir os valores desconhecidos, quer através do cálculo mental, quer através da subtracção de pesos em ambos os pratos.

Uma vez compreendidos os princípios de equivalência, a terceira tarefa (ver anexo 3) foi ao encontro da formalização da escrita da equação. Nesta tarefa tive como objectivo contextualizar a balança com a realidade e formalizar os princípios de equivalência. O grande objectivo foi fazer a ponte entre a balança e a escrita e resolução da equação. Assim, ambicionei que os alunos se apoiassem em situações concretas e posteriormente passassem para situações abstractas, nomeadamente a resolução de equações.

As tarefas quatro e cinco (ver anexo 4) foram uma miscelânea de problemas e equações. Reservei lugar à resolução de algumas equações, mas assumi que ao resolver problemas que envolvessem equações também estariam a resolver equações do 1.º grau. Tentei que os problemas fossem diversificados e incluíssem outros conhecimentos matemáticos.

O denominador comum em todas as tarefas foi a preocupação com a discussão em grande grupo. Tentei pensar exaustivamente em todas as resoluções possíveis de modo a estar melhor preparado para a discussão das tarefas. Este aspecto foi trabalhado durante a planificação das aulas leccionadas.

Na globalidade, os objectivos da planificação foram cumpridos. Houve necessidade de reestruturação na maior parte delas, pelo que a reflexão, realizada em grupo após cada leccionação, ajudou e permitiu este reajuste. Não foi uma mudança de direcção, mas um aperfeiçoar do que já estava planeado. Em algumas situações, alguns alunos revelaram facilidade na compreensão do tópico e foi necessário não deixar esmorecer estes alunos. Noutras ocasiões, alunos com maior dificuldade, fizeram com que fosse necessário rever determinados conceitos ou recuar em algumas discussões de modo a ultrapassar as dificuldades sentidas. A planificação (ver anexos 6, 7, 8 e 9) das aulas leccionadas revelou ser um instrumento precioso, principalmente na condução da discussão em grande grupo, pois neste sentido, tentei pensar exaustivamente em todas as resoluções que os alunos pudessem apresentar. Deste modo, convenci-me de que estava bem preparado para moderar o debate no seio da turma.

As aulas leccionadas

Iniciei a leccionação desta unidade didáctica com grande entusiasmo e expectativa. Apesar de a turma não me pertencer, procurei não fugir às orientações curriculares e pedagógicas que o professor titular da turma tinha imprimido ao longo do ano. Por isso, é pacífico afirmar que o trabalho desenvolvido na sala de aula ao longo da proposta pedagógica foi semelhante ao desenvolvido ao longo do restante ano. Na resolução das tarefas, procurei acompanhar e orientar os alunos, esclarecer dúvidas e ajudar a ultrapassar eventuais dificuldades. Contei com a ajuda dos dois professores presentes na turma para esta tarefa. Tentei que as discussões em grande grupo fossem dinamizadoras e enriquecedoras, o que nem sempre consegui pois o ruído e a excitação de final de ano tomaram, por vezes, conta da aula, diminuindo a produtividade das várias discussões que podiam ter sido melhor conduzidas. Enquanto os alunos trabalhavam, percorri a sala, coloquei questões junto deles para que pudesse compreender melhor as suas estratégias e os seus raciocínios.

Para a primeira aula, tive intuito de levar uma balança e permitir aos alunos, experimentar, colocar ou retirar pesos, de modo a poderem observar, in loco, o equilíbrio da balança. Tal não foi possível, mas felizmente todos os alunos, já tinham tido contacto com uma balança de pratos. Os objectivos para esta aula foram cumpridos, na medida em que os alunos aprenderam e entenderam o conceito de balança equilibrada, concluíram que quando se adiciona ou subtrai o mesmo peso numa balança equilibrada, ela mantém-se equilibrada. Descobriram o peso desconhecido na balança de dois pratos utilizando estratégias mentais ou retirando pesos de cada prato da balança, ou seja, aplicaram o princípio de equivalência na balança. No entanto, existiu um obstáculo que alguns alunos experimentaram e por isso, entendi dedicar um espaço a estes alunos na aula seguinte, de modo a entenderem melhor, a dificuldade de não respeitar a convenção de várias ocorrências da mesma incógnita representarem o mesmo número (Kieran, 1985).

A tarefa para a aula seguinte, de cunho exploratório, era extensa. Os alunos realizaram a tarefa a pares e ambicionei que os mesmos estivessem preparados para passar da balança, à escrita e resolução de equações. Na discussão em grande grupo, pretendi que fossem os alunos, com a minha ajuda, a construir as definições que foram escritas no quadro. Os conceitos trabalhados nesta aula foram compreendidos através da analogia com a balança de dois pratos. Facilmente, os alunos chegaram aos conceitos de equação, solução, termos, membros e enunciaram os princípios de equivalência. A analogia com a balança ajudou os alunos a visualizar o que se passava na resolução de uma equação retirando pesos dos pratos da balança. Nesta aula houve dois ou três alunos que referiram as operações inversas, mas a maioria dos alunos demonstrou estratégias, ainda informais, de resolução de equações. O método da tentativa e erro e as técnicas de contagem foram as eleitas. Aos alunos que referiram as operações inversas, escolhi questionar junto deles, para melhor entender os seus raciocínios. Como as equações foram todas do tipo $ax+b=c$, depressa estes alunos se habituaram, que bastaria subtrair b a c para começarem a resolver a equação. Resolvi então propor uma equação do tipo $ax-b=c$ e deixei-os a pensar até à próxima aula. Para este caso, a balança representou um modelo limitado, pois não permitiu trabalhar com valores negativos.

Principalmente por isto, os tais alunos relacionaram a operação inversa somente com a subtracção. Pareceu-me também, que a dificuldade surgida na aula anterior, a de não respeitar a convenção de várias ocorrências da mesma incógnita representarem o mesmo número, se tinha dissipado com a resolução de novas equações.

Na terceira leccionação, resolvi iniciar a aula com uma breve revisão dos princípios de equivalência. Assumi que estes fossem a base da resolução de equações e, assim, procurei que os alunos compreendessem a estratégia de resolução de equações através da realização da mesma operação em ambos os membros. Esta estratégia acabou por se revelar difícil para os alunos. Praticamente ninguém adoptou este método de resolução, pois na opinião deles "complicava tudo" ou "eram muitos cálculos". O Jaime afirmou que "consegue resolver equações, mas se for por este método já não consegue". A única aluna que inicialmente adoptou este método foi a Ana, pois escrevia a equação na balança e à medida que trabalhava na balança, fazia os cálculos na equação. Para ela, realizar a mesma operação em ambos os membros fazia sentido. No entanto, deixou de lado este método porque levava demasiado tempo a resolver uma equação, comparativamente aos seus colegas. Para muitos, realizar a operação em ambos os membros era uma perda de tempo pois já sabiam que havia termos que se anulavam. Com isto, adoptaram a estratégia da transposição, que na opinião deles "era mais simples e não complicava" e muitos falavam em operações inversas. No final, a maioria encarou a resolução de equações como "muda-se de membro, muda-se de operação". Se bem que o meu objectivo não fosse que utilizassem logo esta regra, o facto é que foram os alunos por sua iniciativa, a concluir este método. A técnica da verificação da solução também foi um aspecto trabalhado ao longo da resolução de equações, o que permitiu dar confiança aos alunos sobre a veracidade da solução obtida.

Para muitos professores, a resolução de problemas tem lugar no final do tópico que leccionam. Apesar de eu não ser um seguidor dessa política, reservei para a última leccionação a resolução de problemas. A resolução de equações já estava consolidada nos alunos e a sua formalização fazia mais sentido quando o grau de dificuldade era grande e o método de contagem não permitia resolver a equação. Procurei que os problemas propostos na aula fossem diversificados, que não fossem somente problemas aritméticos e que abordassem outros temas matemáticos tais como a geometria. Insisti na interpretação da solução, no contexto do problema, e para isso, propus problemas em que a solução da equação não fosse a solução do problema. As estratégias adoptadas pelos alunos dividiram-se em dois grupos: o primeiro grupo, maioritariamente os alunos com menos dificuldades, escolheram dispor os dados, traduzir de linguagem natural para linguagem matemática através da escrita e resolução da equação e dar a resposta ao problema. O outro grupo adoptou estratégias mentais e aritméticas na resolução dos problemas. Neste último grupo foi notória a dificuldade de distanciamento da Aritmética. Quando o problema exigia a participação da Álgebra, a Aritmética por si só não permitia a resolução correcta do problema. Neste contexto, penso que estes alunos não mobilizaram os conhecimentos adquiridos anteriormente na resolução de problemas. Finalmente, para esta aula, preparei um truque de magia. Propus aos alunos que pensassem num número, seguidamente pedi que efectuassem algumas operações e posteriormente solicitei o resultado final. Com apenas o resultado final, "adivinhei" o número pensado. Os alunos ficaram incrédulos e todos quiseram experimentar. Foi um momento lúdico que cativou a atenção dos alunos e encantou a turma para a beleza da Matemática e das equações. Apesar de não lhes ter revelado, naquela aula, o segredo da magia através da equação, penso que acima de tudo, o jogo serviu para cativar a sua atenção e orientar os seus raciocínios para a Matemática.

Capítulo 4

Métodos de Recolha de Dados

Numa investigação qualitativa, a compreensão profunda dos problemas, bem como o objecto das questões de estudo são determinantes para ir mais além na investigação de determinados fenómenos, sem preocupação com a generalização dos resultados. Na investigação qualitativa, a veracidade dos dados depende da integridade e do conhecimento do investigador, neste caso, eu próprio. As técnicas de entrevista, observações minuciosas e análises de produções escritas dos alunos, permitiram uma investigação mais ampla no sentido de clarificar as questões deste estudo.

Durante este estudo, o meu papel cobriu várias vertentes. Além de leccionar as aulas, tive de recolher e analisar dados, para posteriormente redigir o presente relatório. No entanto, não posso esquecer que o papel mais importante foi, sem dúvida, o de contribuir para a aprendizagem dos alunos no tópico das equações. Tive de ter em mente que o trabalho de investigação não pode comprometer o meu papel enquanto professor na sala de aula, muito embora os dois papéis estão intrinsecamente ligados.

Para a recolha de dados recorri à recolha documental, à observação, ao questionário e à entrevista. A recolha de documental disse respeito às produções escritas dos alunos, de modo a permitir-me inteirar das suas maiores dificuldades e das estratégias de resolução seguidas. Possibilitou também, ter melhor noção sobre os seus raciocínios e da forma como mobilizam os conhecimentos adquiridos. No que concerne às produções escritas, houve algum constrangimento nas tarefas realizadas na aula. Os alunos resistem em escrever os seus raciocínios e depressa corrigem as tarefas, pela bitola dos que pensam, ser os bons alunos. No final, nem sempre as produções escritas dos alunos representaram os seus primeiros raciocínios na tarefa realizada.

Senti que a observação das aulas é uma tarefa bastante difícil, dado que o meu papel principal foi de orientar e "apagar fogos" quando os alunos levantavam o braço. Ainda assim a observação das aulas teve um contributo importante na análise dos dados e na percepção das dificuldades que os alunos sentem no momento em que realizam a tarefa proposta.

Como complemento à observação de aulas, escolhi utilizar o Diário de Bordo onde procurei registar as minhas expectativas e reflectir sobre o decurso da minha prática lectiva. O meu papel de professor não me permitiu registar no momento todas as situações de cada aula, mas a reflexão após a aula, realizada em grupo, permitiu que este instrumento enriquecesse e contribuísse de forma positiva para o estudo. Como suspeitei que o registo áudio pudesse falhar optei por, no final de cada aula, registar com maior fidelidade os diálogos e os episódios mais relevantes para o estudo.

Quando o trabalho se realizou a pares ou em pequeno grupo, pensei que o registo áudio fizesse sentido em alguns grupos, pois nem sempre o produto final evidencia todas as aprendizagens. De início, pensei que o registo áudio funcionasse como complemento às produções escritas e assim, fosse possível compreender melhor, as dificuldades sentidas no trabalho em grupo. O registo áudio implementado, junto dos pequenos grupos, foi por vezes infrutífero devido ao ruído envolvente. Procurei assim, no final de cada aula, recordar, descrever e registar em papel os episódios mais marcantes. Deste modo e tendo em conta a presente investigação, estou convicto que consegui compreender melhor o modo de como a aprendizagem decorre.

Através do questionário, aplicado a todos os alunos (ver anexo 10), pretendi compreender a visão que os alunos tinham da Álgebra e das equações após a leccionação do tópico em questão. Devido aos constrangimentos de tempo fora do período de aulas, por parte dos alunos, apliquei este questionário nos dez minutos finais de uma aula de Estudo Acompanhado. Sendo a última aula do ano lectivo muitos alunos escolheram não preencher o questionário, pois as mentes deles já estavam de férias.

A entrevista realizada, apenas a alguns alunos, teve como objectivo entender mais profundamente as opções de alguns alunos. Com o propósito de responder às questões de estudo, procurei seleccionar alguns alunos, conhecer melhor as suas estratégias, as suas perspectivas perante o tópico leccionado para assim ter uma visão mais profunda das suas aprendizagens.

As entrevistas ocorreram no final da unidade didáctica, mais concretamente no penúltimo dia de aulas do ano lectivo. Contrariamente ao que tinha projectado, não houve possibilidade de as entrevistas serem realizadas num ambiente individual. A disponibilidade dos alunos fora do período de aulas é reduzida e para além disso, a realização da prova de aferição de 6.º ano, obrigou a um reajustamento de calendário. Com isto, consegui a dispensa dos alunos na última aula de estudo acompanhado para a realização da entrevista. Embora tenha sido realizada em grupo a tarefa foi de cariz individual.

A selecção dos três alunos teve por base o seu desempenho nas aulas de Matemática. Procurei escolher alunos com desempenhos diferentes. O Paulo revelou bom desempenho ao longo do ano. É um aluno com facilidade de comunicação, mas com algum défice na escrita dos seus raciocínios. A Sandra inicialmente revelou dificuldade em compreender o significado de incógnita e queria investigar até que ponto esta dificuldade contribuía para o seu desempenho no tópico das equações. Hesitei na escolha da aluna, pelo facto de ser muito reservada e mostrar dificuldade na comunicação matemática. No entanto, tinha a convicção que a Sandra é uma aluna interessada e trabalhadora e tudo faz para ultrapassar as dificuldades. A terceira aluna seleccionada também revelava dificuldades, no entanto por ausência de autorização do encarregado de educação, não foi possível investigar o seu desempenho.

A tarefa levada a cabo pelos três alunos tinha como objectivo principal investigar o cerne das questões deste estudo: Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações do 1.º grau. Assim, reservei para esta tarefa a resolução de equações e de problemas (ver anexo 11). Para além disso, coloquei a mesma questão que havia apresentado na primeira aula, para inferir no final da unidade didáctica, qual a estratégia utilizada pelos alunos ao serem questionados pelo peso desconhecido na balança. Como a análise de erros também é uma forma de aprendizagem, escolhi colocar algumas resoluções de equações, de forma a permitir aos alunos a identificação e a sua correcção.

A entrevista foi áudio gravada mas existiu algum constrangimento em certos momentos pois uma das alunas falava muito baixo. Outra condicionante foi o facto de os alunos por vezes falarem entre si, pelo hábito de trabalharem em grupo e quererem logo discutir os resultados. Mesmo com algumas condicionantes penso que não comprometeu o trabalho de investigação e o balanço das aprendizagens que discuto no capítulo seguinte.

Por questões de ordem ética, foi pedido autorização aos encarregados de educação dos alunos seleccionados para a entrevista, autorização (ver anexo 13) para a utilização dos dados recolhidos. Dado que uma das alunas não entregou a autorização atempadamente, fui forçado a não utilizar a recolha documental referente à mesma.

Capítulo 5

Apresentação e Análise de Dados

Neste capítulo procuro apresentar e analisar os dados referentes ao desempenho dos dois alunos seleccionados para este estudo. Esta análise reporta-se, quase em exclusivo, à entrevista realizada no final da unidade didáctica, no entanto utilizo algumas produções dos alunos realizadas na aula. O trabalho realizado, pelos alunos, na entrevista foi de cariz individual embora tivessem discutido, entre eles, algumas questões. Alguns diálogos apresentados são fruto de transcrição, mas existem alguns que foram inaudíveis no registo áudio, pelo que recorri às notas de campo onde procurei ser o mais fidedigno possível, na reprodução dos episódios marcantes.

O Caso do Paulo

O Paulo é um aluno de 12 anos bem-disposto que se relaciona harmoniosamente com os colegas da turma. Gosta de ajudar os outros na resolução das tarefas, mas acima de tudo gosta da competição e da discussão de resultados.

É um aluno que revela bastante interesse pelos conteúdos da disciplina de Matemática. Segundo o professor da turma, "o Paulo é bom aluno e tem mantido este bom nível ao longo de todo o ano lectivo, no entanto ainda tem margem de progressão". É um aluno que gosta de desafios e problemas. Não se inibe de questionar o professor ou a turma sobre qualquer assunto que lhe suscite dúvidas. É um dos alunos que participa espontaneamente e gosta de ir ao quadro, particularmente quando as questões são de difícil resolução. No questionário, o Paulo descreve a Matemática em uma palavra: “Maravilha”. Na opinião dele, a Matemática serve para perceber uma parte maravilhosa da vida. Apesar de no questionário responder que prefere resolver equações a resolver problemas que envolvam equações, no final da entrevista, o Paulo confidenciou que ama a matemática e adora resolver problemas que mais ninguém consegue. Ao longo do ano lectivo o Paulo foi um aluno de nível cinco na disciplina de Matemática.

Resolução de equações

A primeira tarefa, realizada no início do tópico das equações, caracteriza-se por ser de carácter exploratório. Nesta, é pedido aos alunos que descubram o valor desconhecido numa balança de modo a que esta mantenha o equilíbrio. O objectivo desta tarefa, no início da unidade didáctica, era que os alunos se apropriassem do conceito de equilíbrio na balança e descobrissem os valores desconhecidos colocados nos seus pratos.

Na resolução, o aluno apenas coloca o valor quatro junto à incógnita, como se pode observar na figura abaixo.

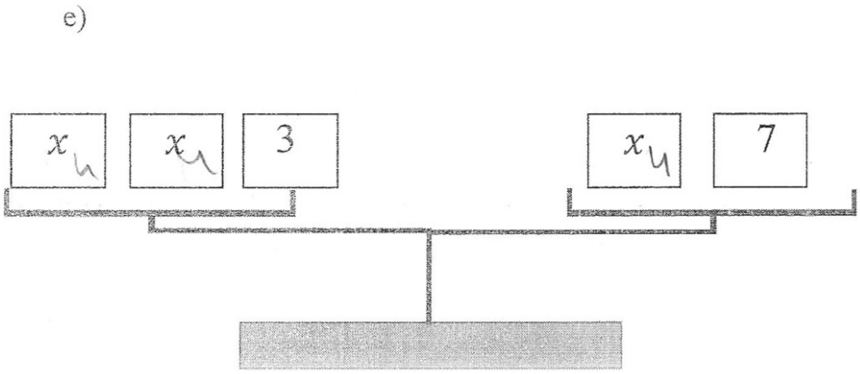


Figura 3 – Resolução do Paulo no início da unidade didáctica

Para compreender qual a estratégia utilizada pelo Paulo para chegar à solução, questionei-o sobre a sua resolução:

> **Professor**: Como é que chegaste ao 4?
> **Paulo:** Então é fácil, tem de dar o mesmo nos dois pratos, não é? Se fizer com o 1, dá 5 num e 8 no outro. A balança não fica equilibrada. Se fizer com o 2 dava 7 no esquerdo e 9 no direito. Também não fica equilibrada. Só dá com o 4. Se for com o 4 dá 11 nos dois pratos.
> **Professor**: Ok, experimentaste vários valores. Tiveste sorte de ser o 4! Imagina que fosse o 100?
> **Paulo**: Pois…

O Paulo questiona se os valores para o peso x são iguais, se o peso x do prato esquerdo é igual ao peso x do prato direito. Após ter respondido que sim, o Paulo rapidamente chega à conclusão que o peso x é 4. Nesta situação, o aluno utiliza mentalmente a estratégia da tentativa erro (Kieran, 1992). Experimenta o 1, depois o 2 e o 3 e em seguida o 4, que satisfaz a situação de equilíbrio na balança. De realçar que quando o aluno experimenta o 2, verifica que no prato esquerdo a soma é igual a 7 e por isso o 2 não serve como solução, pois no outro prato está o 7 e mais qualquer coisa.

Na questão 1f) o objectivo era semelhante, mas a balança continha mais "pesos" desconhecidos. O Paulo abordou a questão da mesma forma. Experimentou o valor 1 para x e quando experimenta x=2 a balança fica equilibrada. Os cálculos nesta questão foram efectuados na calculadora e o Paulo apenas escreve o resultado final (Fig. 4).

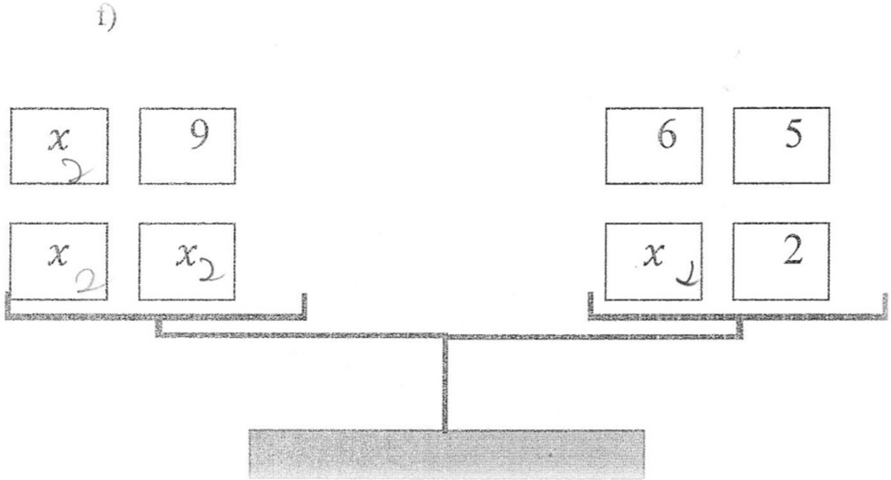


Figura 4 - Resolução do aluno à questão 1f)

De notar que na resolução (Fig. 4), o aluno só coloca o valor certo junto à incógnita. Todas as outras experimentações foram realizadas com recurso à calculadora, sem o acompanhamento de registos escritos. Este é um caso recorrente neste e nos outros alunos desta turma, o que origina a que não escrevam este tipo de cálculos na resolução da tarefa. Tal situação só é perceptível para quem presencia de perto este episódio. Ainda assim, questionei o Paulo se a solução fosse 100, como é que ele faria? Experimentaria todos os valores até 100? Ao que ele respondeu: "talvez não, se calhar saltava valores". Este episódio ocorre na primeira aula do tópico das equações, facto que pode explicar esta estratégia do aluno.

A primeira questão da tarefa da entrevista era igual à realizada no início do tópico das equações. Já depois de terminada a unidade didáctica, esta questão surge com o objectivo de investigar qual a estratégia seguida pelo Paulo para descobrir o valor desconhecido na balança. Se resolve a questão por tentativa e erro, como fez na primeira aula, se recorre à escrita e resolução da equação ou se aplica os princípios de equivalência nos pratos da balança. Antes da resolução da questão, Paulo questiona-me quanto ao processo que deve seguir, dizendo preferir o método da realização da mesma operação em ambos os membros:

> **Professor**: Na primeira, nós já fizemos uma coisa parecida na primeira aula das equações.
> **Paulo**: Ò Stôr, podemos resolver isto com equações ou temos de resolver isto com o corta x, corta x, corta x?
> **Professor**: Como é que tu preferes resolver?
> **Paulo**: Eu escrevi assim…
> **Professor**: Como é que achas mais fácil?
> **Paulo**: Como está na balança, eu cortava um x de cada lado e agora está aqui 3 e está aqui 7 podia pôr um valor que desse 7, logo 4. Na segunda ainda é mais simples. É somar os números da direita…
> **Professor**: Ok, escreve primeiro que já discutimos.

Paulo resolveu a equação, eliminando x em cada prato da balança como se observa na Fig. 5.

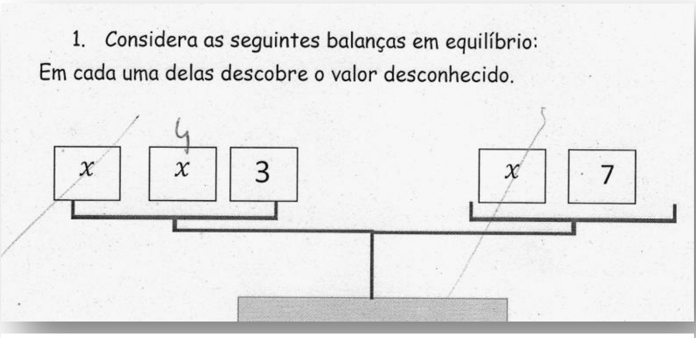


Figura 5 - Resolução do Paulo da mesma questão após a unidade Didáctica

Nesta fase, o aluno reconhece na balança a estrutura de uma equação de 1.º grau e a possibilidade de descobrir o valor desconhecido resolvendo simplesmente a equação. Ainda assim prefere aplicar os princípios de equivalência. Na balança, o aluno elimina x em cada um dos pratos e através de técnicas de contagem procura um valor que adicionado a 3 dê 7 (Fig. 5).

Na segunda balança, novamente elimina x em cada um dos pratos, soma os termos independentes, ao que subtrai 9 no primeiro prato da balança e finalmente divide por 2 chegando à solução 2 (Fig. 6). Deste modo, o Paulo resolve a equação mas sem recorrer à balança. Utiliza a técnica da inversão das operações nos dois membros da equação (undoing), um dos métodos de resolução de equações referidos por Kieran (1992).

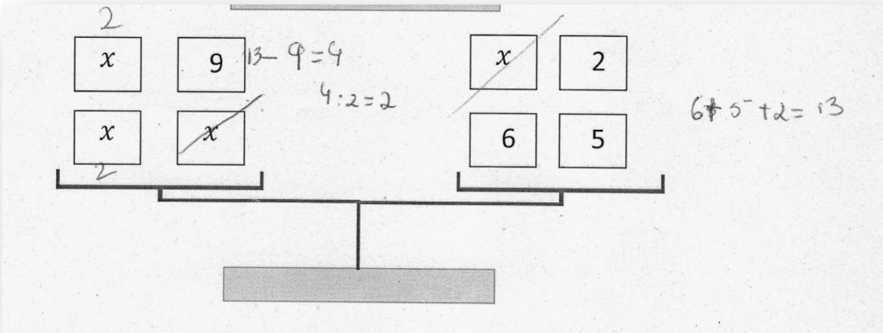


Figura 6 – Resolução do aluno através dos princípios de equivalência

A estratégia do Paulo para a resolução de equações baseia-se naquilo que Kieran (1992) caracteriza por transposição (muda de membro, muda de sinal) e que consiste em deslocar termos de um membro para outro, utilizando a operação inversa da inicial.

Quando olhou para a segunda questão da tarefa, o Paulo esboçou um sorriso e afirmou: “Estas equações são bué fáceis”. O aluno resolveu sem grande dificuldade e com enorme rapidez as quatro equações propostas (Figs. 7 e 8).

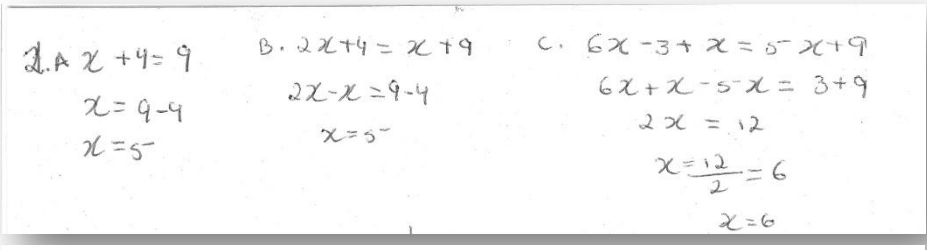


Figura 7 - Resolução do aluno das equações do 1.º grau

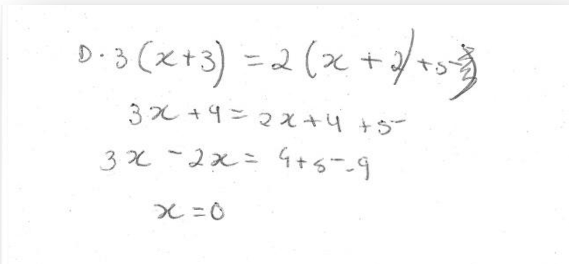


Figura 8 - Resolução da equação da questão 2

No final, com o auxílio da calculadora, Paulo procedeu à verificação de cada uma das equações e esboçou novo sorriso com a certeza de que estavam correctamente resolvidas. Na resolução do aluno verifica-se que utiliza a estratégia da transposição, mas não coloca o símbolo de equivalente. No entanto, penso que ele reconhece as equações como sendo equivalentes e atribuo a ausência do símbolo ao facto de um dos objectivos deste aluno ser o de terminar a tarefa no mais curto espaço de tempo. A competição é uma das características mais marcantes neste aluno e para ele é importante terminar primeiro que os colegas.

Como já suspeitava de que o Paulo iria terminar a tarefa mais cedo tinha mais algumas questões no “bolso”. No final da tarefa propus que ele resolvesse mais algumas equações de cariz mais difícil ao que ele prontamente aceitou.

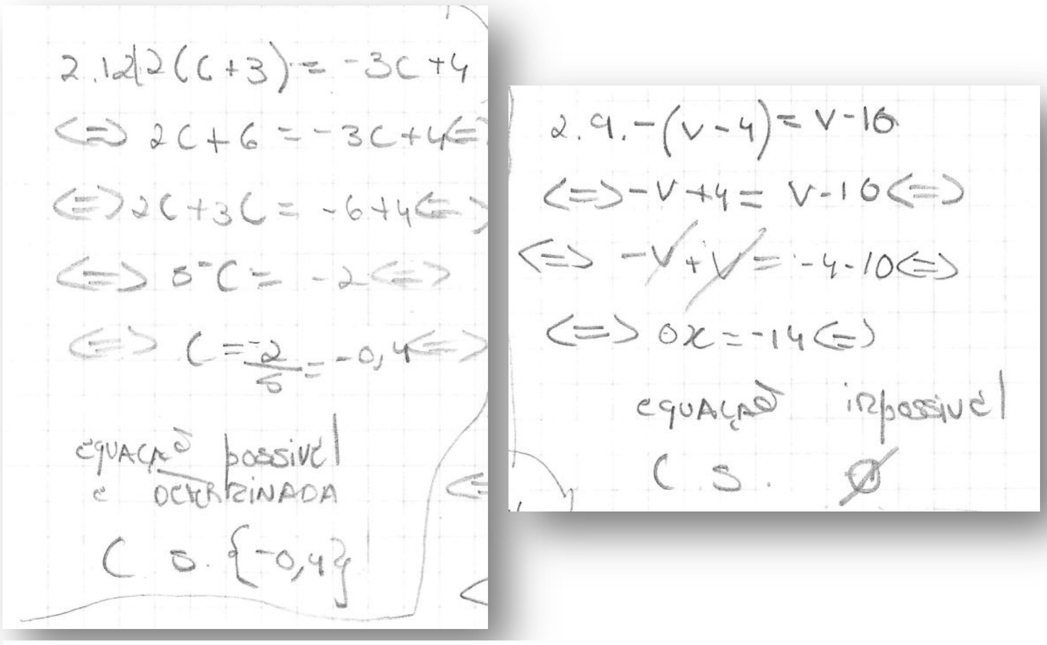
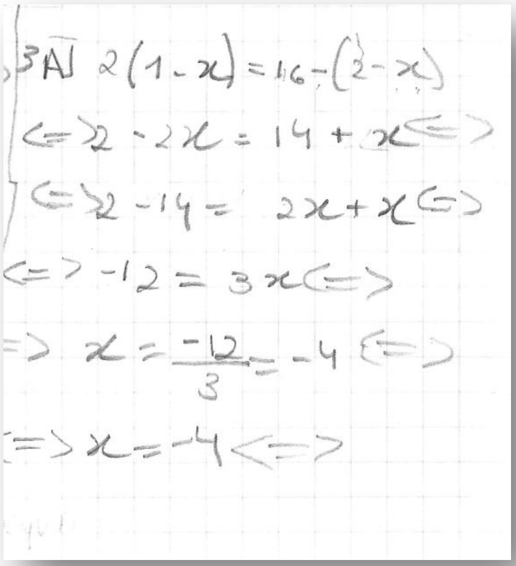


Figura 9 - Resolução do Paulo às equações propostas

Na questão 2.9, o aluno, de acordo com Kieran (1992), efectua a transposição incorrecta (Fig. 9). Não realiza a operação inversa, facto que causa alguma estranheza, uma vez que na resolução da equação 2.12 não comete este erro (Fig. 9).

Na questão 3, o aluno revela que o sentido do sinal de igual parece estar bem compreendido. Na resolução desta equação, trabalha com a incógnita no membro direito (o que não é natural neste ano de escolaridade) e no final conclui que x=-4. Para este aluno o sinal de igual é visto nos dois sentidos o que revela uma compreensão positiva e que contribui para uma melhor aprendizagem das equações.



3A) $2(1-x) = 16-(2-x)$

$\Leftrightarrow 2-2x = 14+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-14 = 2x+x \Leftrightarrow$

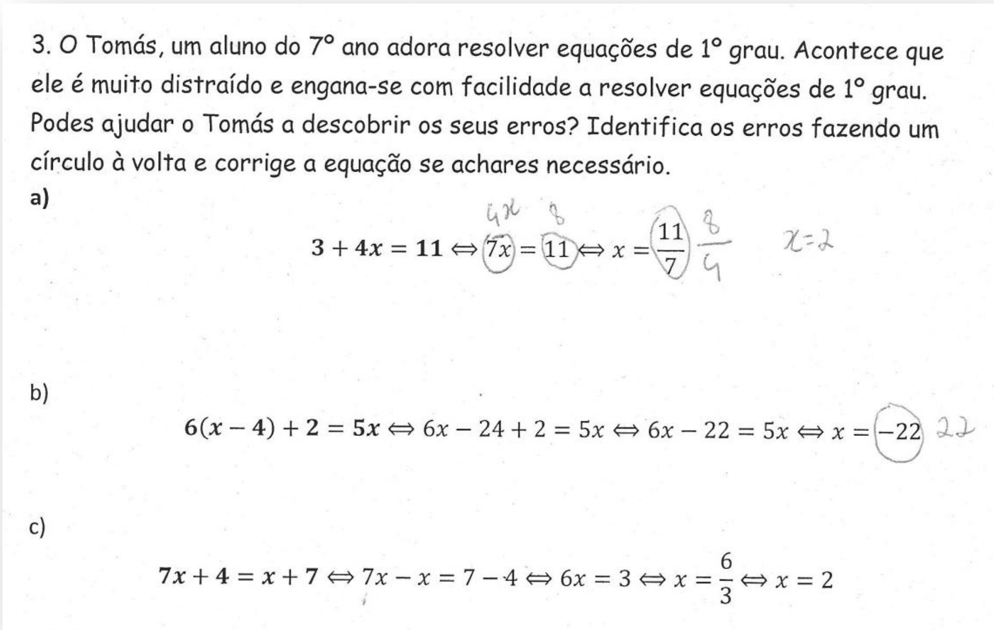
$\Leftrightarrow -12 = 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-12}{3} = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -4 \Leftrightarrow$

Figura 10 – Resolução da equação com a incógnita no membro direito

Na questão 3 da entrevista é pedido ao aluno para identificar e corrigir os erros na resolução de equações. Na questão 3a), o Paulo rapidamente identifica a adição incorrecta de termos que não são semelhantes (Kieran, 1981) e a partir daí corrige a resolução da equação. Contudo nesta questão, o aluno questiona que, pelo facto de existir um erro no "meio" da equação, a solução da equação não poderá estar correcta.



3. O Tomás, um aluno do 7º ano adora resolver equações de 1º grau. Acontece que ele é muito distraído e engana-se com facilidade a resolver equações de 1º grau. Podes ajudar o Tomás a descobrir os seus erros? Identifica os erros fazendo um círculo à volta e corrige a equação se achares necessário.

a)

$\mathbf{3+4x=11} \Leftrightarrow \overset{4x}{7x} = \overset{8}{11} \Leftrightarrow x = \frac{11}{7} \quad \frac{8}{4} \qquad x=2$

b)

$\mathbf{6(x-4)+2=5x} \Leftrightarrow 6x-24+2=5x \Leftrightarrow 6x-22=5x \Leftrightarrow x=-22 \quad 22$

c)

$\mathbf{7x+4=x+7} \Leftrightarrow 7x-x=7-4 \Leftrightarrow 6x=3 \Leftrightarrow x=\frac{6}{3} \Leftrightarrow x=2$

Figura 11 - Resolução do aluno à questão 3

Embora este aluno resolva com sucesso a maioria das equações propostas, demonstra alguma dificuldade em identificar os erros na resolução de equações, como se pode ler no seguinte diálogo:

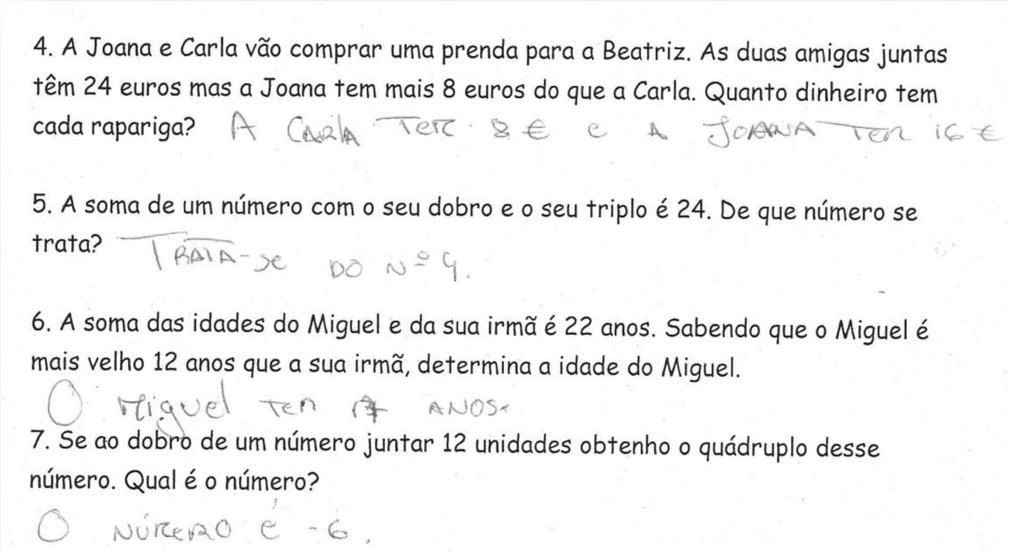
Paulo: Na 3 há alguma que está certa? Pelo menos eu acho que há! Acho que a b) está certa?!
Professor: Se achas que está certa então *talvez* tenhas razão!
(Silêncio)
O Paulo olha atentamente para a resolução.
Paulo: Ò Stôr mas ele aqui não devia ter passado o 22 para este lado e ficava igual a 22? Ora aqui está o erro!
Paulo: A c) está certa?!
Professor: Disseste o mesmo da alínea b)
O Paulo novamente olha atentamente para a resolução.

Na alínea c) o aluno acabou por concluir que a solução estava errada, mas não encontrava o erro. A conclusão baseou-se em substituir o 2 na equação inicial e verificar que a igualdade era falsa, no entanto, não conseguiu identificar o erro. Talvez se lhe tivesse proposto que resolvesse a equação desde o início teria sido mais fácil para Paulo encontrar o erro desta resolução.

Resolução de problemas

Apesar de afirmar que prefere resolver equações do que resolver problemas que envolvam equações, o Paulo afirma "os problemas também são fixes". Dos problemas apresentados na entrevista, o Paulo resolveu-os sem muita dificuldade e com bastante rapidez. A interpretação dos problemas não lhe traz grande dificuldade e a sua primeira estratégia é resolver os problemas de uma forma informal ou até mentalmente.

Na resolução de um problema, Paulo revela ser um aluno metódico que dispõe os dados do problema e escreve a equação que o traduz, passando, de seguida, à sua resolução. Finalmente, depois de encontrada a solução, gosta de dar a resposta ao problema permitindo desta forma interpretar a solução no contexto do problema (Figs. 12 e 13). O aluno de seguida indica a resposta ao problema junto ao enunciado do mesmo.



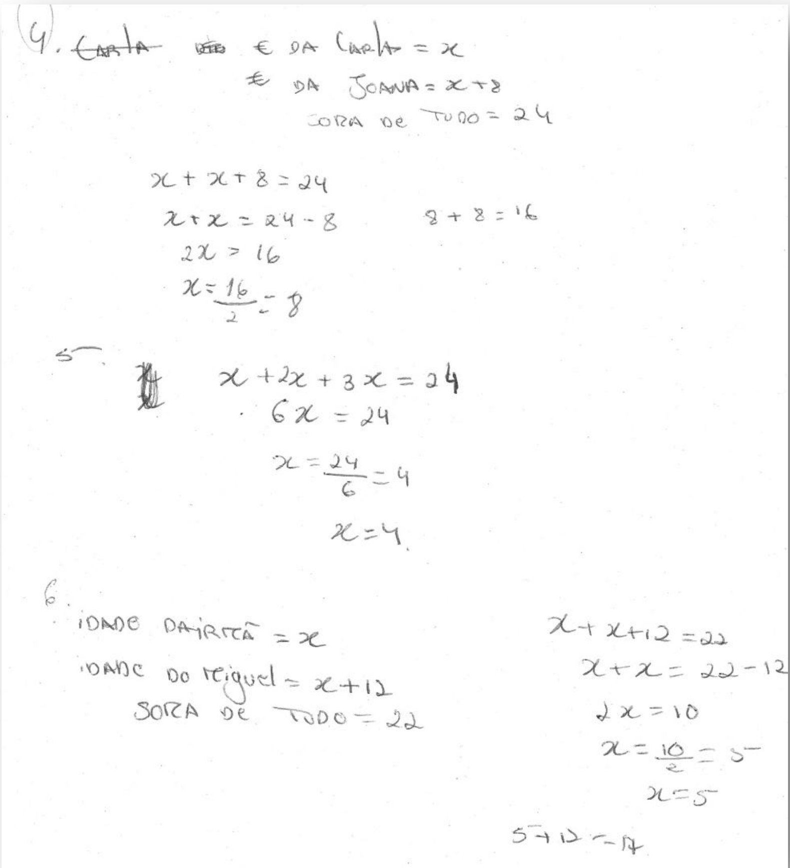
4. A Joana e Carla vão comprar uma prenda para a Beatriz. As duas amigas juntas têm 24 euros mas a Joana tem mais 8 euros do que a Carla. Quanto dinheiro tem cada rapariga? A CARLA TEM 8 € E A JOANA TEM 16 €

5. A soma de um número com o seu dobro e o seu triplo é 24. De que número se trata? TRATA-SE DO Nº 4.

6. A soma das idades do Miguel e da sua irmã é 22 anos. Sabendo que o Miguel é mais velho 12 anos que a sua irmã, determina a idade do Miguel.
O Miguel TEM 17 ANOS.

7. Se ao dobro de um número juntar 12 unidades obtenho o quádruplo desse número. Qual é o número?
O NÚMERO É -6.

Figura 12 - Problemas propostos e respostas do aluno



4. ~~CARLA~~ € DA CARLA $= x$
€ DA JOANA $= x+8$
SOMA DE TUDO $= 24$

$x + x + 8 = 24$
$x + x = 24 - 8$ $\quad 8 + 8 = 16$
$2x = 16$
$x = \frac{16}{2} = 8$

5. $x + 2x + 3x = 24$
$6x = 24$
$x = \frac{24}{6} = 4$
$x = 4$

6. IDADE DA IRMÃ $= x$
IDADE DO MIGUEL $= x + 12$
SOMA DE TUDO $= 22$

$x + x + 12 = 22$
$x + x = 22 - 12$
$2x = 10$
$x = \frac{10}{2} = 5$
$x = 5$
$5 + 12 = 17$

Figura 13 - Resolução de problemas pelo aluno

Como o Paulo terminou mais cedo a tarefa, resolvi propor um problema extra que já havia sido realizado na aula, mas sobre o qual não tive oportunidade de questionar o seu raciocínio. O problema apresentado foi: a soma de três números pares consecutivos é 66. Quais são os números?

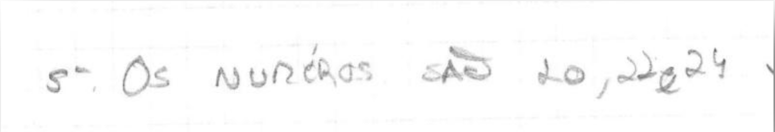


Figura 14 - Resposta do aluno ao problema proposto

Paulo indicou os números 20, 22 e 24 como resposta a este problema (Fig. 14), à semelhança do que já tinha acontecido na aula. De novo o aluno não apresenta qualquer tipo de cálculos. Questionei-o sobre este facto:

> **Professor**: Deixa-me fazer-te uma pergunta sobre este problema.
> **Paulo**: Tá errado?
> **Professor:** Não.
> **Paulo:** Yes!
> **Professor:** Tem a ver com a solução. Quero que me expliques como chegaste a esta solução sem efectuar cálculos! Fizeste com a equação ou sem equação?
> **Paulo:** Ò Stôr isso também já estava no outro… quer que lhe explique com a equação? Eu faço já aqui a equação!
> **Professor:** Mas pensaste com equação ou sem equação?
> **Paulo:** ah, ah, ah,.. Eu fiz assim… 66 a dividir por 3 e depois fui um bocado por tentativas. Como era consecutivos…
> **Professor:** Então não precisaste de escrever nenhuma equação!
> **Paulo:** Já acabei, não tem mais nada para eu fazer?

Como nos explica, para este problema o aluno não sentiu necessidade de recorrer à escrita da equação que traduz o problema. Na opinião dele "é mais simples fazer assim, não vale a pena complicar". Para ele, mesmo se os números forem mais complexos esta estratégia resulta. Se forem mais números, basta dividir o resultado final por esse número e depois fazer algumas tentativas. Contudo, realço que esta estratégia de resolução foi desenvolvida com o auxílio da calculadora e, talvez por isso, o aluno a prefira, em vez de escrever a equação que traduz o problema e posteriormente resolvê-la.

Este aluno gostou da unidade didáctica das equações de 1.º grau e na opinião dele "as equações servem para resolver problemas". Afirma ainda "que gostou de todas as tarefas realizadas nas aulas referentes às equações de 1.º grau". É um aluno que gosta de ir mais além no que diz respeito à Matemática. De facto não são muitos os alunos que se interessam em resolver o célebre problema de Diofanto. O Paulo mostrou muito interesse e curiosidade em tentar resolver o problema. Experimentou a dificuldade uma vez que o problema possui muitos dados e envolve trabalho com fracções. Após algumas tentativas falhadas, no final da entrevista o aluno afirmou: "Não faz mal Stôr, pode ser que para o ano já consiga resolvê-lo!".

O Caso da Sandra

A Sandra é uma aluna de 11 anos de idade. Nas aulas de Matemática aparenta ser uma aluna calma e introvertida. Não participa espontaneamente e mostra-se relutante em participar no quadro. Prefere trabalhar no seu lugar ou com a colega de carteira. O seu percurso na disciplina de Matemática tem sido regular. No entanto, é uma aluna que se aplica e trabalha arduamente para manter o seu desempenho nesta disciplina. No questionário, a Sandra refere que para ela a Matemática representa "conhecimentos" e serve "para nos ajudar no dia-a-dia". A aluna dedica algum tempo ao estudo da Matemática e conta com a ajuda do irmão mais velho que supervisiona e corrige os exercícios que pratica. Quando questionada sobre o que achou do tópico das equações, a Sandra simplesmente escreve no questionário que "complica". A aluna manteve ao longo do ano o nível três na disciplina de Matemática.

Resolução de equações

A primeira tarefa, proposta no início da unidade didáctica, foi uma tarefa de cunho exploratório. O seu objectivo consistiu na apropriação do conceito de equilíbrio com recurso às balanças com o intuito de posteriormente melhor se compreender os princípios de equivalência no trabalho com equações. Simultaneamente, também era pedido que descobrissem os valores desconhecidos na balança, de modo a que mantivesse o equilíbrio.

Na realização desta tarefa, no início do tópico das equações, a Sandra conseguiu descobrir sem grande dificuldade os valores desconhecidos das primeiras balanças. Na questão 1f) (ver anexo 2), em que a balança apresenta uma situação mais complexa, a aluna para descobrir o valor desconhecido respeita a condição de equilíbrio, mas atribui valores diferentes para a incógnita x como se observa pela figura 15.

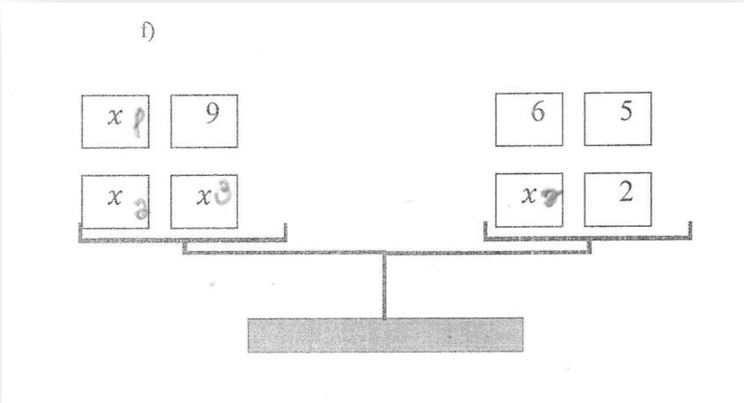


Figura 15 - Resposta da aluna à questão proposta no início da unidade didáctica

A primeira questão da tarefa da entrevista, realizada no final da unidade didáctica, foi em tudo semelhante à realizada no início do tópico. Desta feita, tinha como objectivo investigar qual a estratégia seguida pela Sandra de modo a descobrir o valor desconhecido, isto é, se recorria à escrita e resolução da equação, se aplicava os princípios de equivalência na balança ou se adoptava o método tentativa e erro. Paralelamente, também pretendia investigar se, neste momento, Sandra atribuiria valores diferentes à incógnita x.

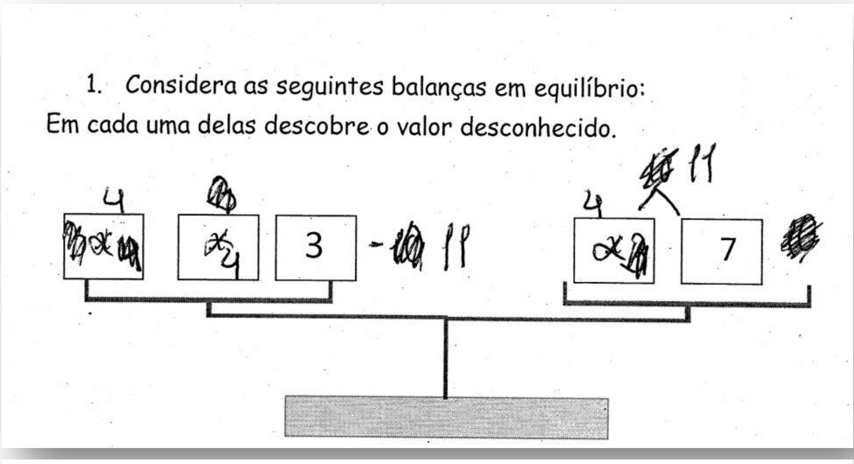


Figura 16 - Resolução da Sandra à questão 1 da entrevista

Na balança, a aluna experimenta o valor 3 para a incógnita x. Para isto começa por substituir 3 por x no segundo prato e verifica que a soma nesse prato é 10 (Fig. 16). Procede do mesmo modo para o primeiro prato, mas como a soma não é 10, o que pretendia, risca o valor de 3 na balança. De seguida, efectua a substituição para x=4. A soma nos dois pratos é 11, logo conclui que 4 é o valor desconhecido da primeira balança.

A segunda balança apresenta uma situação mais complexa do que a primeira:

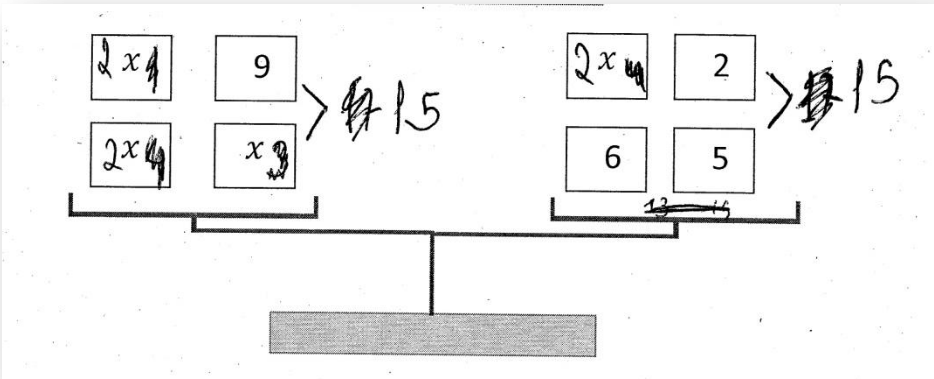


Figura 17 - Resolução da aluna à questão 1 da 2ª balança

Na primeira tentativa, a aluna experimenta o valor 4 no prato direito (Fig. 17). Verifica que a soma nesse prato é 17. Ela sabe que o prato esquerdo tem de ter "peso" 17, pois só assim a balança estará equilibrada. A aluna "conta pelos dedos" e chega à conclusão que se encontra rasurada na resolução. A aluna atribui a uma das incógnitas o valor 1, à outra o valor 4 e ainda à outra, o valor 3. Desta forma, a soma do prato esquerdo é 1+4+3+9= 17. Para aluna a balança está equilibrada, mas não consegue explicar qual o valor de x.

Neste caso, a aluna apresenta um raciocínio em que chega à conclusão que os valores desconhecidos da mesma balança são diferentes. Este erro é recorrente, pois tinha sido cometido na tarefa do início do tópico das equações e resulta talvez de não ter sido capaz de interiorizar correctamente o significado da incógnita x. Antes de ter oportunidade de a questionar, o colega do lado disse-lhe: "Isso está errado. O x tem de ser sempre igual". A Sandra riscou os valores e os resultados da soma e experimentou de imediato a solução x=2. Deste modo, conclui que ambos os pratos tinham "peso" 15 e que a solução era 2. É possível que o colega lhe tenha dito mais qualquer coisa, uma vez que o 2 foi a primeira tentativa da aluna.

Na questão 2 da entrevista apresentam-se quatro equações com grau de dificuldade crescente. Pretendia investigar nesta questão quais os métodos de resolução que a aluna adopta e quais os erros mais frequentes que comete no processo de resolução.

A primeira equação é, de acordo com Filloy e Rojano (1989), uma equação Aritmética. Para resolver esta equação, a Sandra poderia ter adoptado o que Kieran (2006) apelida de abordagem intuitiva, que inclui estratégia relativa às propriedades dos números ou a abordagem de tentativa e erro. A aluna preferiu a abordagem formal como se verifica pela figura abaixo (Fig. 18).

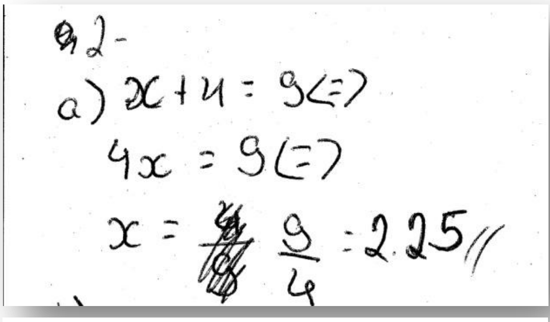


Figura 18 - Resolução da Sandra à equação 2a)

Na resolução formal, a aluna comete o erro da adição incorrecta de termos não semelhantes (Kieran, 1985). A aluna afirma que x+4 é 4x. De seguida procede correctamente à transposição mas a resolução da equação já está comprometida pelo primeiro erro. Neste caso Sandra revela ausência de compreensão do significado matemático de equação. A aluna poderia ter verificado que a solução 2,25+4 não é igual a nove.

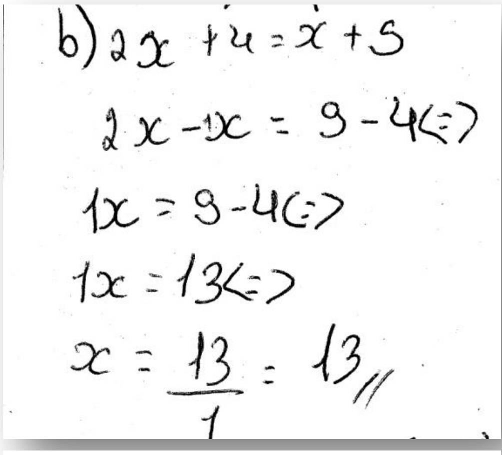


Figura 19 - Resolução da Sandra à questão 2b)

Na resolução da segunda equação, a aluna efectua correctamente a transposição de termos de um membro para outro, mas engana-se nos cálculos pois para ela, 9-4 é 13 (Fig. 19). Este erro origina uma solução incorrecta da equação por dificuldades aritméticas.

A equação apresentada na questão 2c), considerada por Filloy e Rojano (1989) como equação algébrica, já é uma equação com um grau de dificuldade significativa. Porém, nesta fase, a aluna já deveria possuir conhecimentos que a possibilitassem de resolver este tipo de equações.

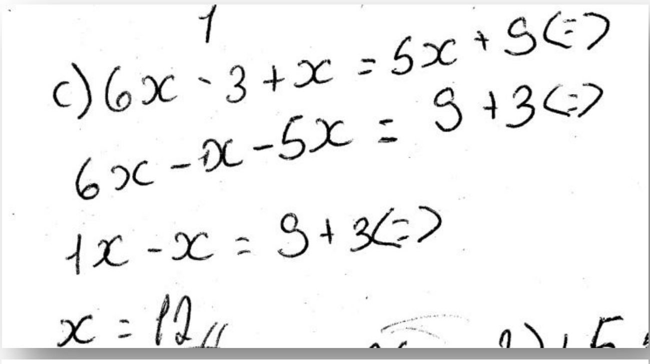


Figura 20 - Resolução da equação 2c)

A aluna aplica correctamente a transposição de um membro para outro, no entanto, o termo em x do primeiro membro com sinal positivo, fica com sinal negativo (Fig. 20). Na minha opinião, atribuo este erro à mecanização da manipulação algébrica. Parece que para a Sandra, todos os termos em x passam para o primeiro membro, bastando para isso trocar de sinal e todos os termos independentes passam para o segundo membro, trocando o sinal à excepção dos primeiros termos de cada membro da equação. De certa forma, é o que acontece na maioria das equações do tipo ax+b=cx+d.

Na equação da alínea d), o grau de dificuldade era acrescido por ter de se aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A aluna reconhece que tem de desembaraçar de parêntesis e pelas “setas” que coloca, reconhece a propriedade distributiva. Contudo, aplica incorrectamente a propriedade distributiva condicionando desta forma, a solução correcta da equação (Fig. 21).

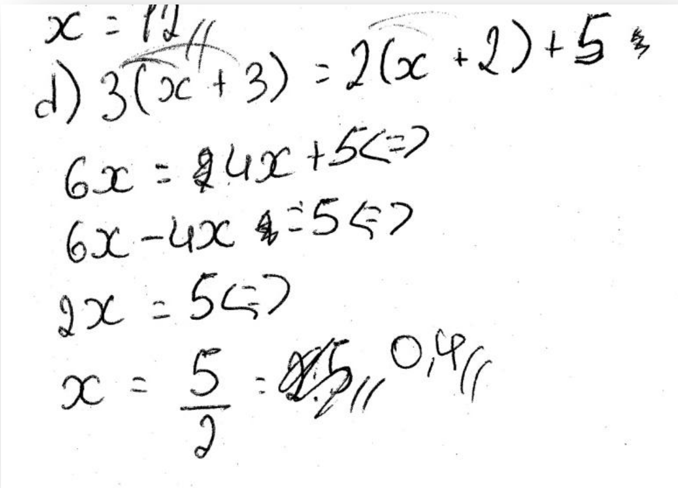


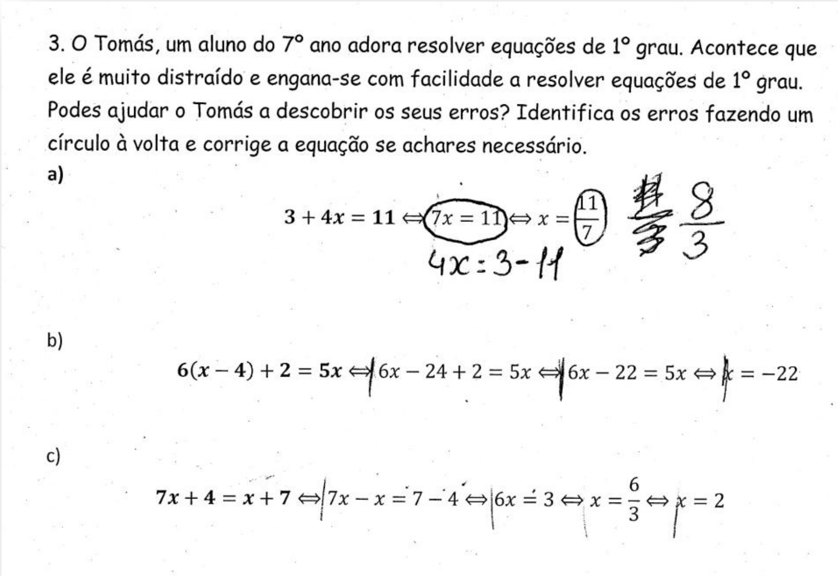
Figura 21 - Resolução da Sandra à questão 2d)

Na resolução, não se entende porque 3 (x+3) é 6x, nem porque 2 (x+2) é 4x. Por isso questionei a aluna sobre este facto:

Professor: Dás aqui um salto muito grande! Como aparece 6x?
Sandra: Então, aqui fiz isto (a aluna aponta para as setas dando a entender que multiplicou 3 por x) e depois fiz logo a conta que dá 6x.
Professor: Então estás a dizer que 3x+3 é 6x?
Paulo: Sim…?!
Professor: E aqui fizeste o mesmo raciocínio?

A aluna multiplica correctamente 3 por x, contudo em seguida, adiciona 3 a 3x afirmando que o resultado é 6x. Novamente multiplica 2 por x e ao resultado adiciona 2 que afirma ser 4x. O erro da aplicação incorrecta da propriedade distributiva provém do trabalho na simplificação de expressões algébricas e compromete, neste caso, a resolução de equações do 1.º grau.

Após ler o enunciado da questão 3, a aluna ficou em silêncio. Percebi que a Sandra não entendeu o que era pedido e teve relutância em questionar o que era pedido. Tomei a liberdade de lhe explicar o que pretendia nesta questão. Numa primeira fase, a Sandra revela dificuldade em entender o que é pedido na questão, principalmente porque era a primeira vez que figurava uma questão deste género, que visava investigar se a aluna é capaz de reconhecer e identificar erros na resolução de uma equação.



3. O Tomás, um aluno do 7º ano adora resolver equações de 1º grau. Acontece que ele é muito distraído e engana-se com facilidade a resolver equações de 1º grau. Podes ajudar o Tomás a descobrir os seus erros? Identifica os erros fazendo um círculo à volta e corrige a equação se achares necessário.

a)

$$3 + 4x = 11 \Leftrightarrow 7x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{7} \quad \frac{8}{3}$$

$4x = 3 - 11$

b)

$$6(x-4) + 2 = 5x \Leftrightarrow 6x - 24 + 2 = 5x \Leftrightarrow 6x - 22 = 5x \Leftrightarrow x = -22$$

c)

$$7x + 4 = x + 7 \Leftrightarrow 7x - x = 7 - 4 \Leftrightarrow 6x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x = 2$$

Figura 22 - Resolução da aluna à questão 3

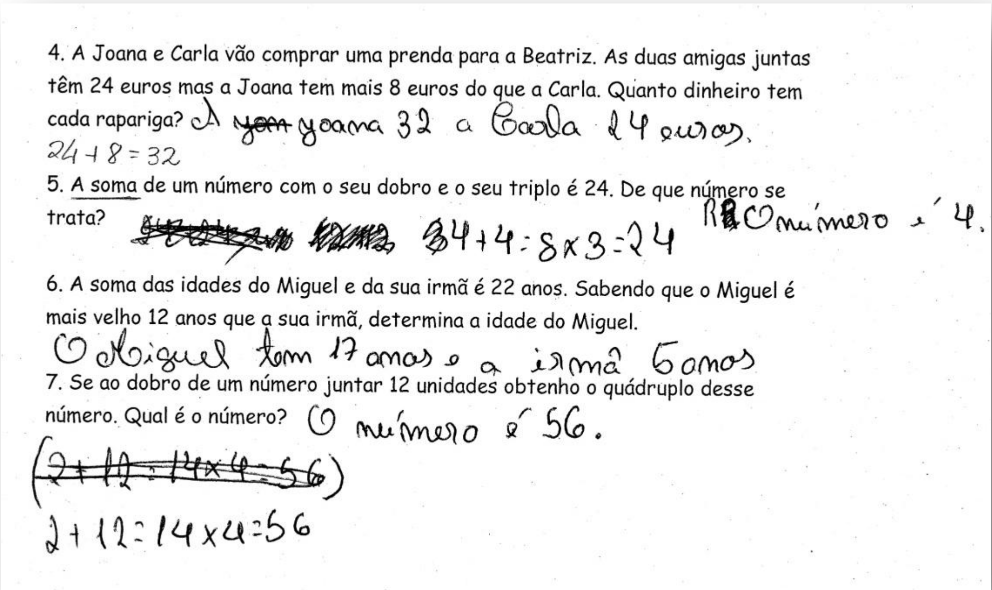
A aluna reconhece após alguns minutos que 3+4x não é 7x e identifica o erro colocando um círculo à volta do que, na opinião dela, está errado (Fig. 22). Contudo, na correcção do erro, a aluna comete novo erro. Comete o erro da transposição, pois em vez de corrigir 4x=11-3, a aluna faz 4x=3-11. De seguida, calcula incorrectamente 3-11, escrevendo que é igual a 8 e chega à solução $\frac{8}{3}$. Não se entende porque no final a aluna dividiu por 3.

No decorrer das aulas, uma das estratégias adoptadas pela maioria dos alunos foi a substituição da solução encontrada na resolução das equações. Este procedimento permitia ao aluno confirmar se a solução encontrada era a correcta. Ao longo das equações resolvidas pela Sandra, a aluna nunca adoptou esta estratégia, talvez se o tivesse feito, possibilitasse a correcção dos seus próprios erros.

Na resolução de equações, a Sandra revela ainda dificuldades de compreensão neste capítulo da Álgebra. Os erros cometidos pela aluna levam a pensar que não atribui significado à resolução de equações e que encara a resolução de equações com a manipulação algébrica. É de fazer notar que o seu processo de aprendizagem não se esgota neste ano de ensino e, consequentemente, Sandra terá outras oportunidades de desenvolver o pensamento algébrico e a resolução de equações.

Resolução de problemas

A Sandra não se mostra muito entusiasta pela resolução de problemas, especialmente no tópico das equações. No final da entrevista, afirma simplesmente que "é uma coisa que não gosta muito". Neste tópico, a Sandra tenta resolver os problemas mentalmente e imediatamente dá a resposta, mas quando a questiono sobre o seu raciocínio a aluna tem muita dificuldade em explicar como chegou à resposta. A figura 23 ilustra os problemas resolvidos pela Sandra que se baseiam em pouquíssimos cálculos e na resposta final ao problema.



4. A Joana e Carla vão comprar uma prenda para a Beatriz. As duas amigas juntas têm 24 euros mas a Joana tem mais 8 euros do que a Carla. Quanto dinheiro tem cada rapariga? A ~~yoa~~ yoana 32 a Carla 24 euros.
24+8=32
5. A soma de um número com o seu dobro e o seu triplo é 24. De que número se trata? 24+4:8x3=24 R: O número é 4.
6. A soma das idades do Miguel e da sua irmã é 22 anos. Sabendo que o Miguel é mais velho 12 anos que a sua irmã, determina a idade do Miguel.
O Miguel tem 17 anos e a irmã 5 anos
7. Se ao dobro de um número juntar 12 unidades obtenho o quádruplo desse número. Qual é o número? O número é 56.
(~~2+12=14x4=56~~)
2+12=14x4=56

Figura 23 - Problemas propostos e respostas da aluna

Na questão 4 a aluna efectuou um pequeno cálculo na calculadora e imediatamente deu a resposta ao problema. Pela rapidez da resolução deste problema questionei a aluna sobre a sua resposta:

Professor: Como é que chegas a este resultado?
Sandra: Ah! A Carla tem 24, não é? Então se a Joana tem mais 8, dá 32. Foi assim que cheguei ao resultado.
Professor: Ou seja, tu fizeste 24+8=32? Mas aqui diz que as duas amigas juntas têm 24 euros!
Sandra: ????
Professor: Queres ver melhor o problema?

Neste caso a aluna concentrou-se unicamente numa frase parcial do problema: "*…24 euros mas a Joana tem mais 8 euros do que a Carla*". Entendeu a palavra mais como sinónimo e indicador de soma e por isso efectuou 24+8. No final, a aluna não interpreta o resultado, pois quando confrontada pelo professor, que as duas juntas têm 24 euros, ela apercebe-se de que algo está errado, mas não consegue reconhecer o que está mal.

A resolução do problema da questão 5 (Fig. 23) também suscita grandes dúvidas pelo que interpelei a Sandra. A estratégia seguida pela aluna, foi o método da tentativa e erro com recurso à calculadora:

> **Professor**: Aqui como é que dizes que dá 4?
> **Sandra**: Eu fiz desta maneira. Fiz com o 1, o 2 e o3. Mas só com o 4 é que dá 24. Fiz assim!
> **Professor:** Experimentaste vários valores! Mas não entendo estes cálculos?
> **Sandra:** ???? (a aluna aponta para a calculadora como que dizendo que fez tudo na calculadora)

No problema 6, a aluna chega correctamente à resposta que o Miguel tem 17 anos e a irmã 5 anos (Fig. 23). Quando questionada sobre o seu raciocínio neste problema a aluna tem dificuldade em explicar:

> **Professor**: Como é que dizes que o Miguel tem 17 anos e a irmã 5?
> **Sandra**: Então, o Miguel e a irmã têm 22 anos. Fiz 22-5 dá 17!
> **Professor:** Então mas aqui fala em soma, não ligaste à soma?
> **Sandra:** Ah, deve estar mal!
> **Professor**: Onde foste arranjar o 5?
> **Sandra**: ???

No diálogo com a aluna não é perceptível como chegou à resposta. Ela afirma que subtraiu 5 a 22 e chegou à idade do Miguel. No entanto, não consegue explicar porque subtrai 5. O que a Sandra fez, com o auxílio da calculadora, foi resolver o problema por tentativa e erro. Efectuou 1+13=14; 2+14=16; 3+15=18; 4+16=20 e finalmente 5+17=22. Descobriu que a idade da irmã mais nova é 5 e posteriormente subtraiu 5 a 22, descobrindo assim a idade do Miguel. Tenho de reconhecer que, quando observei os cálculos da aluna, não percebi de imediato onde esta queria chegar. Só mais tarde é que compreendi que as somas se referiam às idades que os irmãos poderiam ter, uma vez que um era doze anos mais velho do que o outro.

A resolução do problema 7 revela sérias dificuldades de compreensão (Fig. 23). A aluna limita-se à tradução da linguagem natural para a Aritmética. No quadro seguinte apresento uma possível interpretação da resolução da aluna.

Quadro 9: Interpretação dos cálculos da aluna

Ideias parciais do problema	Cálculos da aluna
"ao dobro do número juntar 12 unidades"	2+12
"obtenho"	=
"o quádruplo desse número"	X4
Resolução da aluna	2+12=14X4=56

Ao dar a resposta que o número é 56, a aluna não interpreta o resultado no contexto do problema, pondo de lado uma parte importante da resolução de problemas.

Em síntese, a aluna apresenta dificuldades na resolução de problemas, sobretudo no que diz respeito à compreensão do problema. Aborda os problemas de uma forma Aritmética, o que promove o desenvolvimento de cálculo, sobretudo com o auxílio da calculadora, mas compromete a compreensão e o desenvolvimento do pensamento algébrico, da incógnita, do uso de letras e da resolução de equações.

Capítulo 6

Conclusão

Com o nascimento deste estudo, cresceu a preocupação com as estratégias, dificuldades e os erros que os alunos cometem no seu trabalho com equações do 1.º grau. No presente capítulo, pretendo apresentar as principais conclusões que respondem às questões de investigação, formuladas no início deste relatório e termino com uma reflexão pessoal sobre esta experiência, onde abordo algumas preocupações futuras sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra.

Síntese do Estudo

Nesta investigação, procuro compreender de que forma a unidade de ensino baseada no estudo das equações contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade. Na resolução de equações do 1.º grau, procuro investigar quais as estratégias e os erros mais comuns com que os alunos se confrontam. Paralelamente, investigo de que forma os alunos mobilizam os conhecimentos adquiridos, na resolução de problemas que envolvem equações do 1.º grau. Assim, procuro dar resposta às seguintes questões:

- Que estratégias adoptam na resolução de equações de primeiro grau alunos do 7.º ano de escolaridade?
- Quais os principais erros que alunos do 7.º ano de escolaridade cometem na simplificação e resolução de equações de primeiro grau?
- Como alunos do 7.º ano de escolaridade mobilizam os conhecimentos adquiridos na unidade de ensino na consecução da resolução de problemas que envolvem equações?

A experiência decorre ao longo de uma unidade didáctica num ambiente normal de final de um ano lectivo. Na turma de 7.º ano, que me foi “emprestada” para a leccionação desta unidade didáctica, procuro proporcionar diversos contextos de aprendizagem, incluindo tarefas de cunho exploratório, exercícios, problemas e um jogo. Insisto também no trabalho em grupo, com maior ênfase no trabalho a pares, pois acredito que desta forma a aprendizagem poderá acontecer.

Este estudo segue uma metodologia qualitativa baseada em estudos de caso. Incide no trabalho realizado ao longo das aulas, mas em especial no contributo de dois alunos da turma. Para a recolha de dados são utilizados diversos instrumentos, nomeadamente recolha documental, observação, questionário e entrevista.

As conclusões deste estudo assentam, em grande parte, no estudo dos casos do Paulo e da Sandra. De forma alguma, estes dois alunos são o espelho da turma, pois cada aluno tem as suas vivências e as suas experiências. No entanto, a análise do desempenho destes dois alunos permite responder separadamente às questões de investigação.

Estratégias de resolução de equações

O início da unidade didáctica das equações é para muitos, uma novidade. Para a maioria dos alunos, em Matemática trabalha-se com números. A introdução de letras no estudo da Matemática acarreta, numa primeira fase, alguma resistência em entender o significado da incógnita e qual a sua utilidade. Arcavi (2006) reforça a ideia que a busca do significado de símbolos pode ser cultivada em sala de aula, antes de proceder à aplicação automática das regras. Assim, o sentido de símbolo está associado ao sentido de propósito do uso de símbolos e o poder que o seu uso e compreensão nos conferem sobre uma variedade de situações. O exemplo concreto da balança dissipa para muitos essa dúvida e, para além de dar oportunidade de visualizar o equilíbrio, possibilita também a experiência de descobrir valores desconhecidos. No final da unidade didáctica, muitos compreendem a utilidade do *x*, do *y* ou do *a* e *b*. No que concerne à resolução de equações, o grau de dificuldade é crescente de aula para aula. Se nas primeiras aulas se apresentam equações do tipo aritméticas, no final as equações já são do tipo algébrica. Nas equações aritméticas, nomeadamente do tipo $x+a=b$, a estratégia que prevalece é a estratégia mental. Por exemplo, na equação $x+4=7$, é encarado com naturalidade qual o número que somado a 4 dá 7. A Sandra utiliza duas técnicas: o método da tentativa e erro, onde experimenta valores para x e a técnica de contagem, onde conta de 4 para 7. Responde sem dificuldade que $x=3$. O Paulo aborda a mesma estratégia, mas depressa conclui que é mais fácil recorrer à subtracção, para números mais complicados. O Paulo fala em subtracção pois as equações são escritas com recurso à balança e por isso, todas as equações são da forma $ax+b=c$, uma vez que a balança de dois pratos é um modelo limitado que não permite escrever números negativos. Este aluno teve oportunidade de experimentar diversas estratégias. Para além da técnica de contagem e do método de tentativa e erro, o Paulo resolve a equação proposta na entrevista pelo método que Kieran (1992) caracteriza como *undoing*. Desta forma, o aluno evitou abordar a equação como estrutura matemática e preferiu operar exclusivamente com números. Quando se corta "o cordão umbilical" com a balança, os alunos sentem mais dificuldade. Numa primeira fase, têm de passar de situações concretas para situações abstractas, o que causa transtorno. Alguns alunos continuam a preferir as estratégias mentais, mesmo que o processo seja mais moroso, enquanto que outros, preferem dar o passo em frente e aplicar as operações inversas estudadas com recurso à balança. Neste contexto, a minha batalha pessoal, foi de lentamente, tentar dissuadir os alunos na utilização de estratégias mentais, propondo equações com outro grau de dificuldade. Tenho noção que não devo descurar as estratégias mentais que os alunos procuram, mas ao mesmo tempo, procuro que os alunos formalizem os seus raciocínios na resolução de equações do 1.º grau. Neste momento da leccionação, procuro dar e mostrar a importância dos princípios de equivalência na resolução de equações. Procuro ainda, que os alunos entendam a estratégia de realizar a mesma operação em ambos os membros para dar significado aos princípios de equivalência. Os alunos da turma foram unânimes neste ponto: a realização da mesma operação em ambos os membros só vem complicar a resolução de equações.

O Paulo percebe os princípios de equivalência e a realização da mesma operação em ambos os membros, mas como as operações inversas surgem naturalmente para este aluno, afirma que é mais fácil "passar para o outro lado e trocar a operação". A Sandra não entende os princípios de equivalência e acha que realizar a mesma operação em ambos os membros "são muitas contas" por isso, prefere perceber que "quando se troca de membro troca-se de sinal e no fim divide-se pelo número que está junto ao x". Apesar de não ter abordado a estratégia da transposição, esta foi a estratégia que todos os alunos adoptam no final da unidade didáctica. O Paulo, que entende os princípios de equivalência, não tem dificuldade em concluir que para resolver uma equação do 1.º grau, basta mudar de membro e trocar a operação envolvida. Esta manipulação algébrica, permite ao Paulo resolver com sucesso a maioria das equações que lhe são apresentadas e assim, faz crescer o seu entusiasmo pela Matemática e pelas equações. A Sandra pelo contrário, revela bastante dificuldade na resolução de equações. Desde cedo deixou de lado as suas primeiras estratégias, nomeadamente o uso da realidade e as técnicas de contagem, para dar lugar ao que ela entende como a transposição: Mudar de membro, mudar o sinal ou trocar a operação. A Sandra, tem noção que, para resolver uma equação, tem de começar por isolar a incógnita, mas nem sempre efectua correctamente a transposição dos termos. Na questão 2 da entrevista, a Sandra opta por resolver todas as equações propostas pelo método da transposição. Até nas equações aritméticas, a Sandra prefere não utilizar estratégias mais simples como a contagem ou o uso da realidade. O facto de a Sandra não conseguir concluir com sucesso a resolução das equações propostas, leva-me a crer que as regras de manipulação não foram devidamente interiorizadas pela aluna e aplica cegamente as regras que ela julga ter entendido. Esta situação vai um pouco ao encontro de Kieran (1992), que sugere que os alunos que usam o método da transposição não estão a operar as equações como objectos matemáticos mas sim a aplicar cegamente a regra: muda de membro – muda de sinal. Nabais (2010) também salienta que ainda que os alunos possam aplicar cegamente regras de manipulação ou procedimentos que julgam ter compreendido, a ocorrência de raciocínios erróneos revela ausência de compreensão do significado matemático de equação.

De um modo geral, a estratégia utilizada por todos os alunos na resolução de equações do 1.º grau é a transposição de um membro para outro com a inversão da operação envolvida. Para elegerem esta estratégia, os alunos têm oportunidade de experimentar diferentes estratégias e posteriormente adoptar aquela que mais se sentem confortáveis. Se bem que a escolha seja democrática, tenho de referir que a correcção no quadro, por parte dos alunos, pode condicionar a escolha da estratégia. Quando existe um grande número de alunos que resolve as equações pelo mesmo método, é normal que os poucos que seguem estratégias diferentes, optem pela estratégia que é mais frequente.

Principais erros na resolução de equações do 1.º grau

Grande parte dos erros que os alunos cometem está intrinsecamente ligada à estratégia que desenvolvem na resolução de equações do 1.º grau. Neste capítulo, o erro não é visto com uma conotação negativa. Para Santos (2002), quando o aluno consegue identificar o seu próprio erro e corrigi-lo acontece aprendizagem. Uma das estratégias adoptadas ao longo das aulas leccionadas consiste em aproveitar resoluções erradas de alguns alunos e dar oportunidade a outros e ao próprio de as corrigir. Com a discussão no seio da turma, à volta de eventuais erros, enriquece-se a aprendizagem.

No que concerne aos erros cometidos na resolução de equações, existe um contraste significativo entre o Paulo e a Sandra. O Paulo muito raramente cometeu erros significativos na resolução de equações. Aliás, das sete equações propostas na entrevista, resolveu todas com sucesso. Mesmo que o Paulo cometa erros, ele segue uma estratégia de verificação da solução. Substitui a solução, por ele encontrada, de modo a verificar se está perante uma proposição verdadeira. Se tal não acontece, opta por resolver novamente de início a equação, pois os eventuais erros deste aluno resultam de falhas momentâneas ou esquecimentos esporádicos. Ainda assim, quando confrontado com a questão 3 da entrevista, em que se pede para identificar e corrigir resoluções erradas de equações, o aluno sente dificuldade em seguir a resolução e identificar os erros.

Já Sandra revela mais dificuldades e no final da unidade didáctica ainda comete alguns erros. Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número (Kieran, 1985) é um erro que a Sandra comete por duas vezes. Uma no início da unidade didáctica, o que por si só, não requer grande cuidado, uma vez que é a primeira vez que ouve falar em equações e incógnitas. Mas mais preocupante, é que comete o mesmo erro no final da unidade didáctica, o que leva a concluir que o significado que a aluna atribui à Álgebra não é o desejado. Na equação representada na balança e escrita da forma $x + x + x + 9 = x + 6 + 5 + 2$, a aluna conclui, numa primeira fase, que $x = 1, x = 3, e\ x = 4$. Quando alertada pelo colega que as incógnitas devem ter o mesmo valor, a aluna rapidamente corrige o seu raciocínio. Os erros de cálculo, de natureza Aritmética, o uso de parêntesis (Kieran, 1992) e a adição de termos não semelhantes (Kieran, 1985) são erros relevantes que a aluna experimenta neste processo de resolução de equações. Comete o erro de cálculo quando efectua 9-4=13 e revela dificuldade na adição de números inteiros. Como este erro acontece esporadicamente, atribuo-o ao uso excessivo da calculadora, pois esta aluna efectua todos os cálculos na calculadora. Quando se depara sem calculadora, por vezes acontecem estes erros de cálculo. O uso do parêntesis, catalogado por Kieran (1992), resulta da aplicação incorrecta da propriedade distributiva e, posteriormente, à adição incorrecta de termos não semelhantes. Este erro pode dever-se ao reduzido trabalho que este ano de escolaridade apresenta no trabalho com expressões algébricas. Possivelmente, na ancoragem com o tema das equações, pode ser feito um trabalho prévio com expressões algébricas.

Alguns dos erros cometidos, especialmente pela Sandra, podem ser atribuídos à falta de atenção em alguns momentos do seu trabalho, uma vez que não são repetidos de forma continuada. Ainda assim, estas faltas de atenção levam a que a aluna experimente dificuldades no seu processo de aprendizagem e condicione a sua resolução de equações do 1.º grau. No final da unidade didáctica, estes pequenos erros traduzem-se na dificuldade de compreensão do tópico das equações e comprometem o seu percurso escolar na disciplina de Matemática. No entanto, o seu processo de ensino e aprendizagem não se esgota neste 7.º ano e a Sandra terá novas oportunidades de aperfeiçoar a sua caminhada no tema da Álgebra.

Resolução de problemas

Na presente unidade didáctica, a resolução de problemas tem um papel fundamental para a verdadeira compreensão das equações. É neste capítulo, que os alunos podem entender a utilidade de uma equação do 1.º grau. Assim, procurei diversificar ao máximo o contexto dos problemas propostos, nomeadamente recorrendo ao contexto real, geométrico, numérico e ainda o de jogo. Para além da diversificação, procurei que os alunos sistematizassem a forma de resolução de problemas através da leitura cuidada do problema, escolha da incógnita, a escrita e resolução da equação, se necessário, e a contextualização da solução com o problema proposto.

Os problemas propostos durante as aulas leccionadas foram maioritariamente o que Kieran (1992) refere como word problems tradicionais em que existe uma relação que pode ser representada por uma equação. Nestes inserem-se também os problemas aritméticos que podem ser representados por uma equação. Os problemas aritméticos são resolvidos sem grande dificuldade pela maioria dos alunos da turma. O denominador comum, no que se refere às estratégias utilizadas, é a estratégia mental. Neste tipo de problemas, os alunos não sentem necessidade de escrever a equação e resolvê-la de modo a obter a solução. Para eles, é mais simples recorrer à Aritmética. A calculadora representa um auxílio enorme, mas ao mesmo tempo impede-os de escrever os seus raciocínios, pois estes são realizados na calculadora.

Quando o enunciado do problema é mais elaborado e existem outros dados a considerar no mesmo, uns mobilizam os conhecimentos adquiridos anteriormente e recorrem à escrita da equação de modo a resolver o problema, enquanto que outros continuam a tentar raciocínios aritméticos com o propósito de resolver o mesmo problema. Para estes alunos é difícil distanciarem-se da Aritmética como forma de resolver os problemas. Se bem que o objecto de estudo deste trabalho não é entender a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, este é um aspecto a ter em conta na resolução de problemas que envolvem equações. Para o Paulo, esta tradução da linguagem natural para linguagem matemática surge naturalmente com a metodologia adoptada pelo aluno. Para a resolução de problemas, Paulo dispõe os dados em linguagem natural e coloca a respectiva tradução em linguagem matemática. Deste modo, a resolução de problemas não causa transtorno ao aluno. Em problemas mais elaborados o Paulo recorre à escrita e resolução da equação, mas nos problemas mais simples não vê necessidade de escrever e resolver a equação. O cálculo aritmético é na opinião dele "mais fácil e não complica tanto". Exemplo disso, foi o problema proposto da soma de três números pares e inteiros consecutivos ser 66. Na resolução o aluno não sente necessidade de dispor os dados e consequentemente escrever e resolver a equação, prefere em vez disso, dividir 66 por três e a partir daí fazer tentativas. Para ele, esta estratégia resulta sempre. Embora este aluno tenha noção de duas abordagens para a resolução do problema, não sente necessidade de recorrer à Álgebra e prefere aproveitar-se do cálculo aritmético. Ainda assim, a estratégia deste aluno revela desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

A Sandra não consegue ainda o distanciamento necessário da Aritmética para um bom relacionamento com a Álgebra. A aluna entende algumas palavras como sinónimo de operações a efectuar. Na resolução de problemas a aluna entende a palavra "mais" como adição, "dobro" como multiplicar por dois ou "quádruplo" sinónimo de multiplicar por quatro. As experiências anteriores da Sandra promovem o desenvolvimento do cálculo, mas condicionam a sua compreensão de incógnita e o uso de letras e de equações para resolver problemas. Neste caso torna-se claro que a aluna não foi capaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos anteriormente na resolução de problemas e com isto compromete o desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Globalmente, os alunos que optaram por resolver os problemas de uma forma Aritmética foram os que revelaram dificuldade na escrita da equação que traduz o problema. Isto vai ao encontro de van Ameron (2002), que sugere que a resolução de problemas, segundo duas abordagens diferentes, pode causar dificuldades. Os alunos têm dificuldade em reconhecer a estrutura do problema de modo a representá-lo simbolicamente. Podem reconhecer o procedimento aritmético para determinar a solução, mas não conseguem raciocinar com as incógnitas.

As estratégias, erros e dificuldades encontradas neste estudo, vão ao encontro de anteriores investigações realizadas neste campo. De um modo geral, considero que o estudo da Álgebra representa um obstáculo na aprendizagem dos alunos, na medida em que não reconhecem a sua utilidade imediata. A balança ajuda a reconhecer parte dessa utilidade, contudo o campo da Álgebra é muito mais vasto. À medida que os alunos progridem no ensino, penso que darão o valor adequado que a Álgebra tem no ensino da Matemática.

Considerações finais

Ao longo desta experiência não foram somente os alunos que tiveram oportunidade de aprender. As aprendizagens que eu alcancei são inestimáveis para o meu percurso profissional e para a minha realização pessoal. Este relatório permitiu-me reflectir sobre o ensino da Álgebra e as dificuldades de aprendizagem inerentes, que de outra forma nunca teria tido oportunidade de o fazer. A revisão da literatura, realizada antes da leccionação, possibilitou um olhar fresco sobre as estratégias e dificuldades que outros investigaram, permitindo desta forma adaptar e melhorar as tarefas e, simultaneamente, estar preparado para eventuais erros e dificuldades dos alunos no seu trabalho com equações do 1.º grau. Nas aulas leccionadas, os alunos mostraram-se participativos, entusiasmados e empenhados. O respeito por ambas as partes foi recíproco e apesar de ter leccionado apenas por um período curto de tempo e enquanto futuro professor, a turma comportou-se como se eu fosse o professor titular. O bom desempenho ao nível da Matemática levou-me a pensar, em certas alturas, que estes alunos não sentiriam grandes dificuldades na aprendizagem das equações. Contudo, o primeiro contacto com as equações acarreta, quase sempre, dificuldades nesta área. Juntos, fomos capazes de ultrapassar vários obstáculos e acima de tudo, os alunos manifestaram vontade em aprender. A planificação foi cumprida ao longo das oito aulas, embora a minha inexperiência revelou que as discussões em grande grupo poderiam ter sido melhor conduzidas. Por vezes senti que fui muito brando e tolerei demais a agitação na turma. As tarefas exploratórias ajudaram os alunos a construir o seu próprio conhecimento e penso que desta forma houve aprendizagem significativa. As reflexões após as aulas foram extremamente importantes e decisivas no ajustamento das planificações das aulas seguintes. A reflexão e a opinião de colegas professores revelaram ser uma prática crucial para compreender melhor o modo como decorreram as aulas e simultaneamente aperfeiçoar a minha performance de ensinar e de estar na sala de aula.

Durante este percurso, tive oportunidade de reflectir sobre as questões deste estudo e também, se poderia ter feito as coisas de outra forma para melhorar a aprendizagem dos alunos. Não posso deixar de referir que tenho a forte convicção de que a tecnologia pode ajudar a colmatar algumas dificuldades no desenvolvimento do pensamento algébrico. Eventualmente reservo o interesse de investigar no futuro, de que forma a tecnologia, nomeadamente a folha de cálculo, pode influenciar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Considero o balanço deste trabalho bastante positivo. Entendo a Álgebra num sentido mais amplo, não só no que concerne ao 7.º ano de escolaridade, mas abrangente na Matemática escolar e estou mais consciente dos erros e dificuldades dos alunos no seu trabalho com equações. Tenho a sensação de que necessito ampliar ainda mais os meus conhecimentos sobre a resolução de problemas, pois considero um aspecto de grande importância para uma melhor aprendizagem da Matemática.

Apesar de este estudo ter exigido um grande empenho e muitas horas de trabalho, penso que foi uma experiência gratificante a nível pessoal, uma vez que senti dificuldades ao longo do processo, mas orgulho-me de as ter ultrapassado. Foi também enriquecedora para o meu desempenho enquanto professor de Matemática, pois o nosso modo de estar na vida, só pode ser de formação constante e procura de melhores formas de ensinar e de aprender.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Arcavi, A., Gómez, B., Guimarães, F., Ponte, J., Silva, J. (2006). O ensino e aprendizagem dos Números e da Álgebra: que problemas, que desafios? In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 361- 379). Lisboa: SEM-SPCE.

Baumgart, J. (1994). *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: Álgebra.* S. Paulo: Atual editora

Bednarz, N., Janvier, B. (1996). Emergence and development of Algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp.115-136). Dordrecht: Kluwer.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp.3-12). Dordrecht: Kluwer.

Bell, A. (1996). Problem-solving Approaches to álgebra: Two aspects. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches toalgebra* (pp.167-186). Dordrecht: Kluwer.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFERNELSON.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Branco, N. (2008). O *estudo de Padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese de mestrado. (Universidade de Lisboa).

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, XVI* (2), 81-118.

Carreira, Susana; Boavida, Ana M. R; Oliveira, H; Santos, L. (2008). "Da selha da roupa à forma do bolo. Educação e Matemática", *Educação e Matemática*, 97: 7 - 10.

Esteves, A. (2010). *Resolução de Problemas de Contexto Real no Tema Lugares Geométricos*. Tese de mestrado. (Universidade de Lisboa).

Filloy & Rojano, (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T. & Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp 155-176). Dordrecht: Kluwer Academic.

Guimarães, H. (2005). A Resolução de Problemas no Ensino da Matemática: alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.). *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 145-166). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Hall, R. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. Retirado em Abril 20, 2011 de http://www.people.exeter.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding*
(pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C (1985). The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. In L. Streefland et al. (Ed.), *Proceedings of the 9th PME International Conference*, *1*, 141-146.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 91-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). NewYork: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it*? The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching álgebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). NCTM

Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed) *Children´s understanding of mathematics*: 11-16 (pp.102-119). London: Murray.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 113-120.

Lima, R. (2007). *Equações algébricas no ensino médio: Uma Jornada por diferentes mundos da Matemática*. Tese de Doutoramento. São Paulo: PUC/SP.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19.

Magro, F., Fidalgo, F., Louçano, P. (2010). *Pi 7: Matemática 7.º Ano – Volume* . Edições Asa.

Matos, A. (2007). *Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico. Tese de mestrado*. (Universidade de Lisboa).

Miguel, J. (2006). O processo de formação de conceitos em matemática: Implicações pedagógicas.
Retirado em Agosto 3, 2011 de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/processo.pdf

Nabais, M. (2010). *Equações do 2.º grau: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.ºano*. Tese de Mestrado. (Universidade de Lisboa).

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 105, 83-86.

Pesquita, I., & Ponte, J. P. (2006). Dificuldades dos alunos do 8.º Ano no trabalho em Álgebra.
Retirado em Fevereiro 21, 2011 de http://www.eselx.ipl.pt/eselx/downloads/SIEM/C05.pdf

Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em Matemática no ensino secundário: um projecto de investigação-acção.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática, 4(8), 149-170.*

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* DGIDC, Ministério da Educação.

Reed, S. (1999). *Word problems*. New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? Retirado em Abril 30, 2011 de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/textos/DEBfinal.pdf

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The journal of Mathematic Behavior*, 18(2), 149-167.

Stacey, K., Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. In Stacey, K., Chick, H., & Kendall, M. (Eds.). *The future of the teaching of algebra: The 12th ICMI Study*. (pp. 1-20) Massachussets, Kluwer Academic Publishers.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Tarefas Matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School* , 268-275.

Van Ameron, B. (2002). Reinvention of early algebra: The developmental research on the transition from arithmetic to algebra (Dissertation thesis, Freudhental Instituut, Utrecht). Retirado em 26 de Setembro de 2005 de http://www.library.uu.nl/digiarchief/dip/diss/2002-1105-161148/inhoud.htm

Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 1, 63-75.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. In L., Verchaffel, & S, Vosniadu (Eds), *The conceptual change approach to mathemathics learning and teaching, special issue of learning and instruction, 14*, 469-484.

Warren, E., & Cooper, T. J. (1993). Advancing álgebra. In P. S. Wilson (Ed.), Research ideas for the mathematics classroom: Highschool mathematics (pp. 110-139). Reston, VA: NCTM .

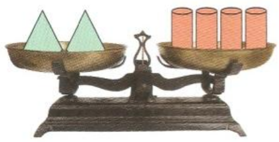
Zorn, P. (2002). Algebra, computer algebra, and mathematical thinking. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Retirado em Julho 15, 2011 de http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap426.pdf

Anexos

Anexo 1: Tarefa 1 – “Uma questão de Peso”

Em cada uma das situações seguintes, considera que todos os sólidos geométricos do mesmo tipo têm o mesmo peso, ou seja, todos os cones pesam o mesmo, todos os cilindros pesam o mesmo, etc.

Situação 1



Balança A

Balança B

a) O que acontece à balança A se se acrescentar um cilindro em cada um dos pratos? Explica o teu raciocínio.

b) O que acontece à balança A se se duplicar o número de sólidos de cada um dos pratos? Explica o teu raciocínio.

c) O que acontece à balança A se se retirar um cilindro do seu prato direito? Explica o teu raciocínio.

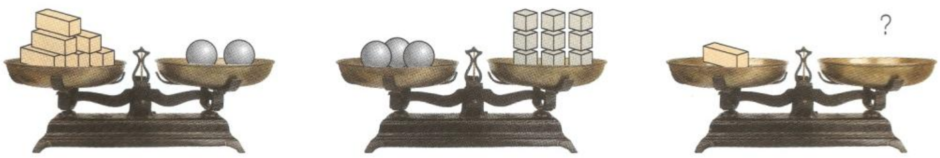
d) Qual dos sólidos é mais pesado: o cone ou o cilindro? Explica o teu raciocínio.

e) O que acontece à balança A se se acrescentar um cilindro no prato do lado esquerdo e um cone no prato do lado direito? Explica o teu raciocínio.

f) Como podes verificar, a balança B não se encontra equilibrada. Que sólidos se devem colocar no prato do lado direito da balança para que esta fique equilibrada? Explica o teu raciocínio.

g) Se um cone pesar 2 kg, quanto pesa um cilindro? Explica o teu raciocínio.

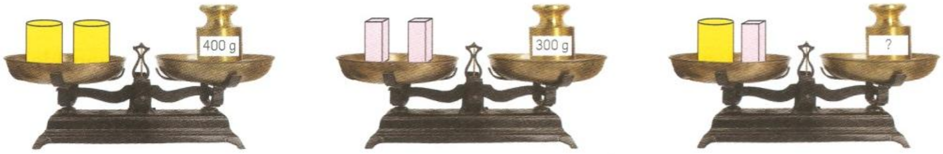
Situação 2



h) Indica, qual, ou quais, o(s) sólido(s) que teria(m) de se colocar no prato vazio da última balança, para esta ficar em equilíbrio. Explica o teu raciocínio.

i) Se uma esfera pesar 6 kg, quanto pesa um paralelepípedo? Explica o teu raciocínio.

Situação 3



j) Qual é o objecto que pesa mais, o cilindro ou o paralelepípedo?

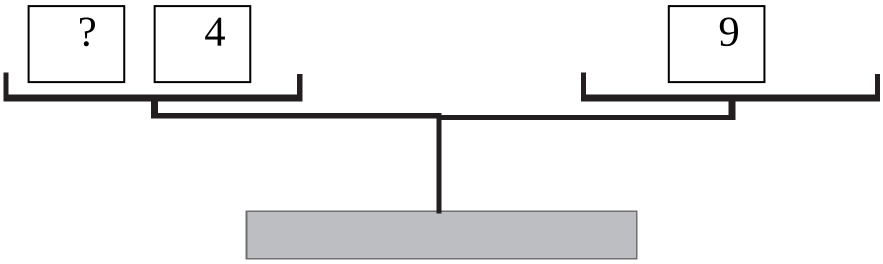
k) Descobre o peso da última balança. Explica o teu raciocínio.

Tarefa do manual PI7, p.11

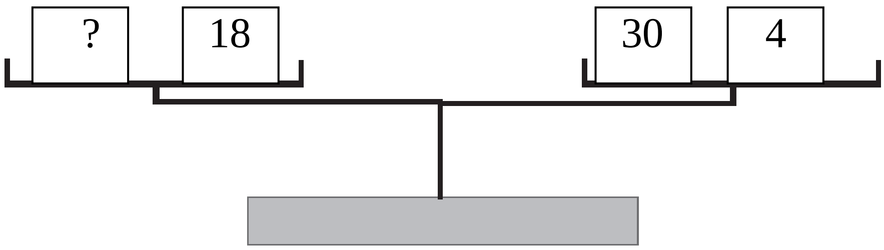
Anexo 2: Tarefa 2- “O peso certo”

1. Descobre o valor do peso desconhecido de modo a que a balança mantenha o equilíbrio.

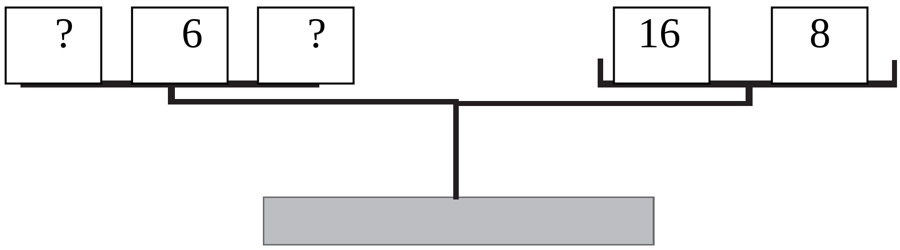
a)



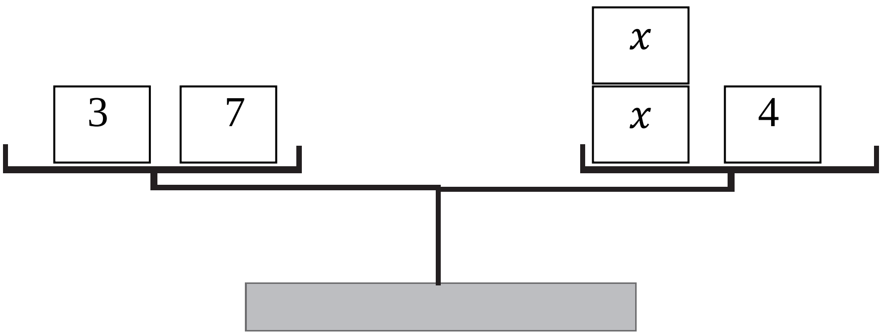
b)



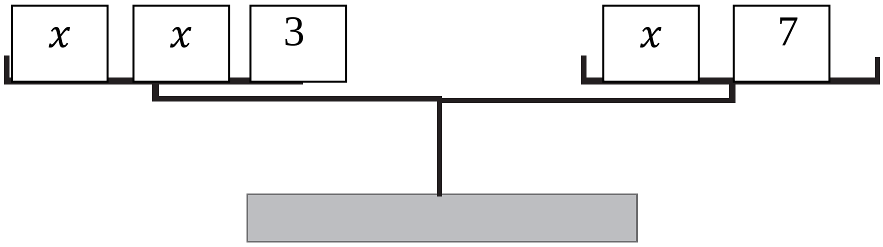
c)



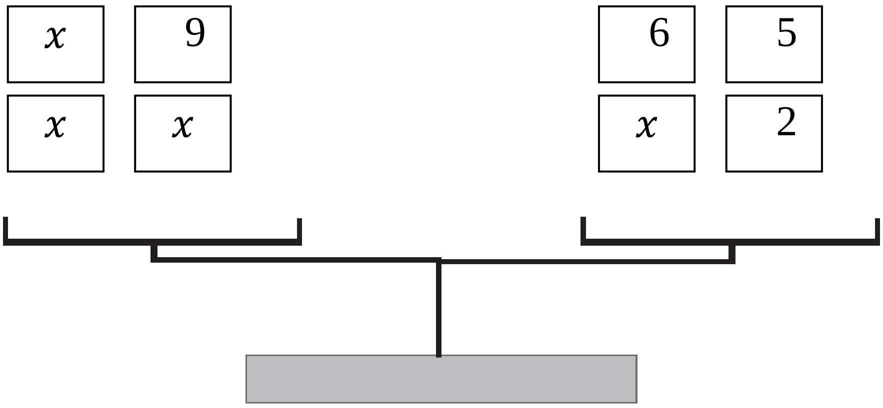
d)



e)

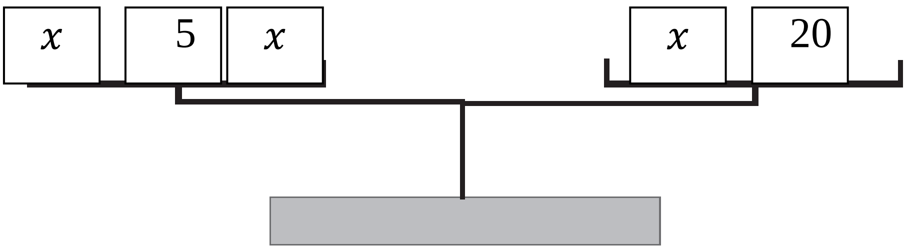


f)



2. Considera as seguintes balanças em equilíbrio.

a)



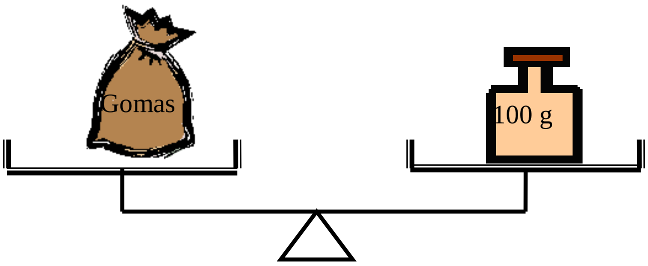
Qual o peso de x que respeita o equilíbrio da balança?

$x=5$; $x=10$; $x=15$ou $x=20$

Anexo 3: Tarefa 3 –"O Peso desconhecido do saco de gomas"

1. A Rita e o Rui foram comprar gomas. Na loja existe uma balança com pesos e cada um dos dois amigos pesou o seu saco de gomas.

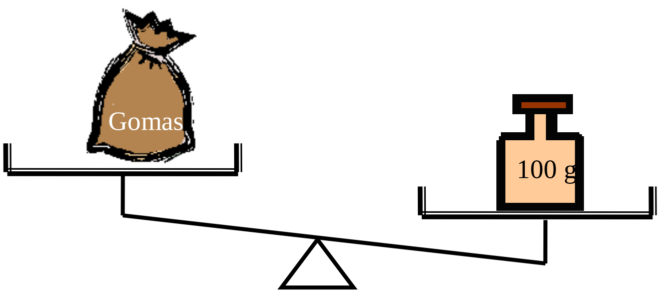
1.1. A Rita colocou o saco de gomas num dos pratos da balança e um peso no outro prato e a balança ficou logo em equilíbrio, como podes ver na figura:



a) Escrevam uma frase que traduza a situação da balança em equilíbrio.

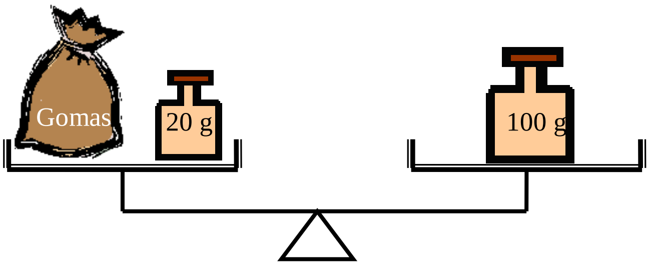
b) Quanto pesa o saco de gomas da Rita?

1.2. O Rui também colocou o seu saco de gomas num dos pratos mas a balança não ficou logo em equilíbrio.



a) O que podem dizer acerca do peso do saco de gomas do Rui?

b) Para tentar equilibrar a balança o Rui decidiu colocar mais pesos na balança. Escrevam uma frase que traduza a situação da balança em equilíbrio.

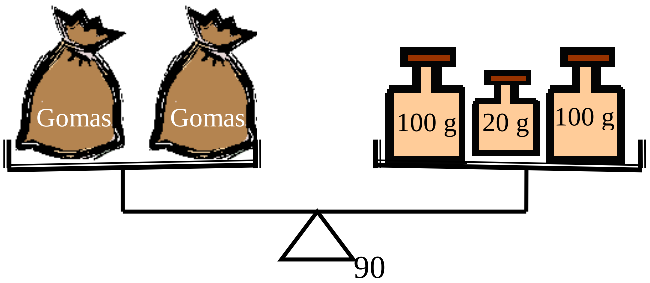


c) Utilizem a letra *x* para representar o peso do saco de gomas. Escrevam uma expressão que traduza a situação representada na balança.

d) A balança ficará equilibrada se retirar 10g de cada prato?

e) Ilustra a situação se retirar 20g de cada prato da balança. Quanto pesa o saco de gomas?

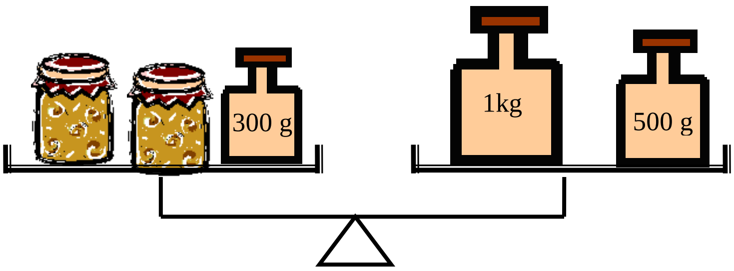
1.3. Como estas não eram as quantidades desejadas, os dois amigos decidiram colocar mais gomas nos sacos de modo a ficarem ambos com o mesmo peso.



f) Escrevam uma frase que traduza a situação da balança em equilíbrio.

g) Escrevam uma equação que traduza a situação representada na balança. De seguida simplifiquem ambos os membros da equação.

2. De seguida é apresentada uma outra balança em que os dois frascos de compota têm o mesmo peso:

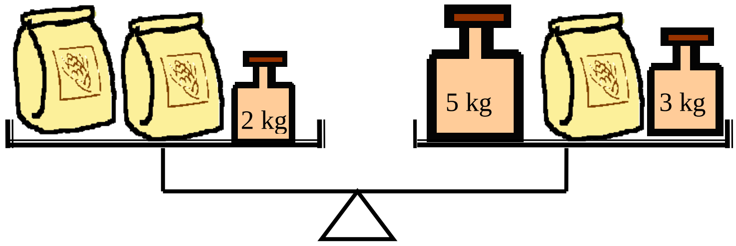


a) Descrevam o que podem fazer para determinar o peso de cada um dos frascos de compota.

b) Traduzam a situação da balança por meio de uma equação.

c) Aplicando os princípios de equivalência resolvam a equação e determinem o peso de cada uma dos frascos de compota.

3. Na balança seguinte, todas as embalagens de farinha têm o mesmo peso:



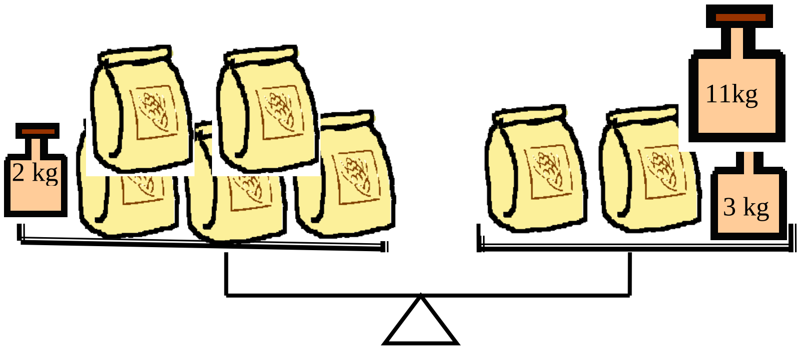
a) Descrevam o que podem fazer para determinar o peso de cada embalagem de farinha.

b) Traduzam a situação da balança por meio de uma equação.

c) Resolvam a equação e determinem o peso de cada embalagem de farinha.

4. Considera a seguinte balança equilibrada.

a) Traduzam a situação através de uma equação e resolvam-na. Quanto pesa cada saco de farinha?



5. Resolve as seguintes equações.

a) $2x + 4 = x + 9$

b)$6x - 3 + x = 5x + 9$

c) $2(x + 4) = x + 10$

d)$3(x + 3) = 2(x + 2) + 5$

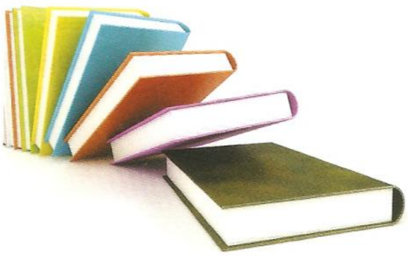
e) $3(x - 4) + 15 = x + 7$

Anexo 4: Tarefa 4: Problemas propostos do Manual

5. A soma das idades do Miguel e da sua irmã é 22 anos. Sabendo que o Miguel é mais velho 12 anos do que a sua irmã, determina a idade do Miguel. Explica o teu raciocínio.

6. A soma de dois números inteiros consecutivos é 37. Quais são os números?

7. Lê com atenção o problema:
"Dois amigos compraram, em conjunto, dez livros. A Ana comprou o dobro dos livros do Pedro. Quantos livros comprou o Pedro?"



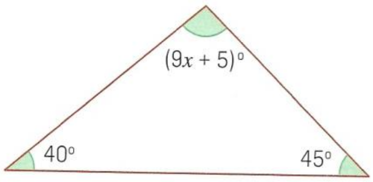
7.1. Escreve uma equação que te permita resolver o problema.

7.2. Explica por que motivo, apesar da equação que traduz a situação ser uma equação possível e determinada, o problema não tem solução.

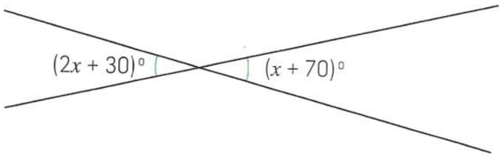
8. A população da aldeia X é o dobro da população da aldeia Y.
Sabendo que as duas aldeias juntas têm uma população de 10 002 habitantes, determina quantos habitantes tem a aldeia Y.

9. Relembra algumas das propriedades geométricas que estudaste no 2.º Ciclo e determina, em cada situação, o valor de x.

9.1.



9.2.



10. A Filipa lançou o seguinte desafio à Carla:
"Se eu somar a idade que tinha há 3 anos com a idade que a minha irmã terá daqui a cinco anos, obtenho 33. Sabendo que ela é 3 anos mais velha do que eu, calcula a minha idade."
Ajuda a Carla, resolvendo o problema. Escreve um pequeno texto explicando o teu raciocínio.

11. O Fernando gastou 200 € na compra de uns sapatos e de uma camisa. Sabe-se que, se ao preço dos sapatos se acrescentassem 40 €, dava para comprar duas camisas iguais à que o Fernando comprou. Determina quanto custou cada peça.

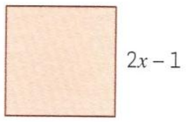
6. A Beatriz é mais velha 3 anos do que o seu irmão Ricardo.

6.1. Se a Beatriz tem 15 anos, qual é a idade do Ricardo?

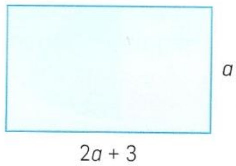
6.2. Considerando que a Beatriz tem y anos, escreve uma expressão que represente a idade do Ricardo.

6.3. Determina a idade da Beatriz, se a soma da sua idade com a do seu irmão for 29 anos.

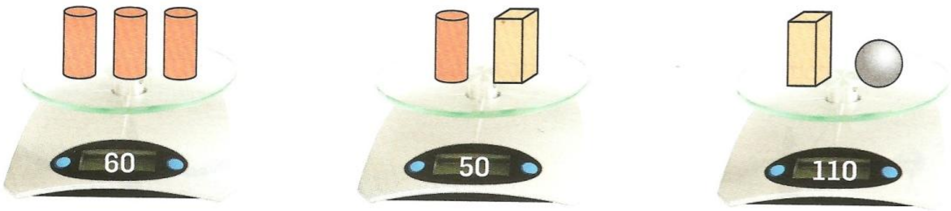
7. Determina o valor de x, sabendo que o quadrado seguinte tem 36 cm de perímetro.



8. Determina o valor de a, sabendo que o rectângulo seguinte tem 66 cm de perímetro.

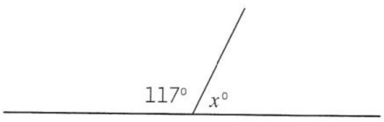


9. Observa os seguintes esquemas.



Descobre o peso de cada um dos sólidos e descreve, detalhadamente, o procedimento que usaste.

10. Dois ângulos dizem-se suplementares se a soma das suas amplitudes for igual a 180º.
Na figura seguinte encontram-se representados dois ângulos suplementares. Observa.



10.1. Escreve uma equação que permita determinar a amplitude desconhecida.

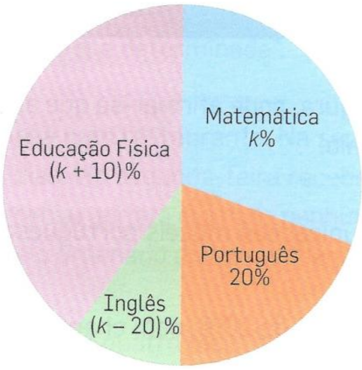
10.2. Determina o valor de x.

11. Um número é maior do que outro cinco unidades. Sabendo que a soma dos dois números é 28, determina cada um dos números.

12. O Sebastian tem, em sua casa, um jardim rectangular com 27 m^2 de área. Sabendo que o jardim tem 6 m de comprimento, determina a sua largura.

19. O comprimento do relvado do campo de futebol d'*Os Invencíveis* é 40 metros maior do que a sua largura. Sabendo que o seu perímetro é de 360 metros, encontra as dimensões do referido relvado.

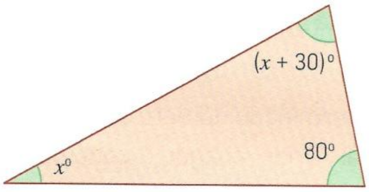
20. Para apresentar os resultados de um estudo estatístico referente à disciplina preferida dos alunos de uma determinada turma, construiu-se o seguinte gráfico circular.



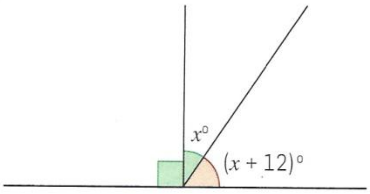
Determina a percentagem de alunos que preferem Matemática.

21. Relembra algumas das propriedades geométricas que estudaste no 2.º Ciclo e determina, em cada figura, o valor de x.

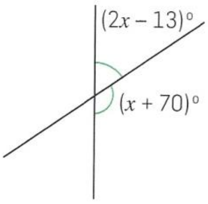
21.1.



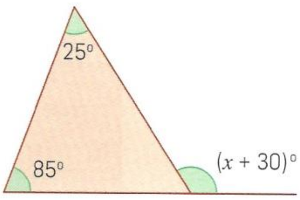
21.2.



21.3.



21.4.



Anexo 5: Problema Proposto no quadro -"Truque de Magia"

Pensa num número;

Duplica-o;

Adiciona 4 ao resultado;

Multiplica-o por 5;

Adiciona 12;

Adaptado de "Brinca e surpreende-te com a Matemática"- Lluis Segarra

Anexo 6: Plano de Aula – 9 de Maio 2011

Unidade Temática: Equações do 1º grau a uma incógnita	*Lições nº102 e 103* *Data: 9 de Maio 2011* *Sala:*
Tema: Equações do 1º grau a uma incógnita *Sumário:* Inicio ao estudo das equações de 1º grau. Resolução da tarefa do manual "Uma questão de peso"	
Tópicos: (Conceitos, conteúdos) Equações do 1º grau a uma incógnita	
Objectivos Específicos: Compreender a noção de equilíbrio na balança/equação. Resolução de equações simples antes da utilização das regras. (resolução de equações com recurso à balança)	
Recursos: Balança e pesos. Manual (Vol. 3) Tarefa	
Estratégias: Tarefa de carácter exploratório. Trabalho a pares. Discussão e síntese da tarefa em grande grupo.	
Avaliação: Questionamento oral (Professor/turma e Professor/aluno).	

Desenvolvimento da aula:

1) Escrita do sumário. (5min)
2) Introdução da balança como instrumento de pesagem. Dar oportunidade a alguns alunos de “mexer” na balança de pesar alguns items. Recordar que em tempos este era o instrumento utilizado para pesar e como funcionava. (15min)
3) Introdução da tarefa do manual, página 11, “Uma questão de peso”. (5min)
4) Trabalho autónomo dos alunos (pares). (40 min)
5) Apresentação e discussão dos resultados. (15-20 min)
6) Desafio com balanças.

Notas:

a) Os alunos devem concluir que quando se adiciona ou subtrai o mesmo peso em ambos os pratos da balança ela continua equilibrada.

b) Do mesmo modo devem concluir que o equilíbrio se mantém apesar de duplicar o número de sólidos em cada prato. (e se triplicar o número de sólidos? E se quadruplicar?)

Para esta aula o principal objectivo é que os alunos consigam interiorizar a noção de equilíbrio da balança. Deliberadamente não se falará em equação.

Anexo 7: Plano de Aula 16 de Maio 2011

<table>
<tr><td><u>Unidade Temática:</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita</td><td>Lições nº104 e 105
Data: 16 de Maio 2011

Sala:</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Tema:</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita
<u>Sumário:</u>
Resolução de equações do 1º grau. Princípios de equivalência.
Resolução da tarefa “O peso desconhecido do saco de gomas”</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Tópicos: (Conceitos, conteúdos)</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Objectivos Específicos:</u>
Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes.

Compreender o significado de termo, membro, incógnita e solução de uma equação.

Compreender os princípios de equivalência.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Recursos:</u>

Tarefa “O Peso desconhecido do saco de gomas”</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Estratégias:</u>
Tarefa de carácter exploratório. Trabalho a pares. Discussão e síntese da tarefa em grande grupo.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Avaliação:</u>
Questionamento oral (Professor/turma e Professor/aluno).</td></tr>
</table>

Desenvolvimento da aula:

1) Escrita do sumário. (5min)
2) Introdução da tarefa (5min)
3) Trabalho autónomo dos alunos – Parte 1 (pares). (10 min) (Parte 1-até à g))
4) Apresentação e discussão dos resultados - Parte 1 (20 min)

1c) Espero que os alunos escrevam a equação x+20=100; questionar o que representa o x; concluir que uma equação é uma igualdade entre 2 expressões onde aparece uma incógnita que representa um valor desconhecido.

Dizer que uma equação tem 2 membros. O 1º membro está à esquerda do sinal de igual e o 2º membro está à direita. 1º Membro: x+20; 2ºmembro: 100 (Cada membro é composto por termos)

1d) a resposta dos alunos será rápida "sim". Escrever a equação equivalente x+20-10=100-10; x+10=90;

1e) x=80; relembrar que se retirar a ambos os pratos de uma balança o mesmo peso a balança continua equilibrada. Então *numa equação se adicionar ou subtrair a ambos os membros da equação o mesmo número obtém-se uma equação equivalente.*

Questionar o que é o 80 perante o problema e concluir que 80 é a solução da equação que escreveram na alínea c).

Escrever no quadro:

O valor da incógnita que transforma a equação numa igualdade verdadeira diz-se solução ou raiz da equação.

1g) ter atenção pois pode haver alunos que não se recordem que x+x são 2x. Uma vez que a questão é resolver a equação poderão ter dificuldades em resolver 2x=220. Relembrar o caso da balança e concluir que *Se multiplicar ou dividir a ambos os membros da equação um número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente.*

5) Trabalho autónomo dos alunos – Parte 2 (pares). (30 min) (questões 2,3,4)

Explicar que com as duas regras é possível resolver equações do 1º grau.

Possivelmente nesta parte surgirão dificuldades. Se necessário, explicar que para resolver uma equação é necessário 1) simplificar ambos os membros da equação e 2) aplicar os princípios de equivalência; 3) Chegar à solução.

6) Apresentação e discussão dos resultados – Parte 2. (20 min)

<u>*Notas:*</u>

Na eventualidade de terminarem a tarefa mais cedo farão os exercícios do manual da página24 e 25.

Anexo 8: Plano de Aula – 18 de Maio 2011

<table>
<tr><td><u>Unidade Temática:</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita</td><td>Lições nº106 e 107
Data: 18 de Maio 2011
Sala:</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Tema:</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita
 <u>Sumário:</u>
Correcção e discussão da tarefa “O peso desconhecido do saco de gomas”
Resolução de equações do 1º grau. </td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Tópicos: (Conceitos, conteúdos)</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Objectivos Específicos:</u>

Solução de uma equação;

Resolução de equações através dos princípios de equivalência.

Solução de uma equação no contexto de um problema.

Formalização na resolução de equações do 1ºgrau.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Recursos:</u>

Tarefa “O peso desconhecido das gomas”

Manual (Vol.3), págs. 34 – exs. 1 a 5.

Manual (Vol.3), págs. 32,33 – exs. 2 a 7</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Estratégias:</u>
Resolução de exercícios. Trabalho individual. Correcção no quadro.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Avaliação:</u>
Questionamento oral (Professor/turma e Professor/aluno).

Correcção no quadro.</td></tr>
</table>

Desenvolvimento da aula:

7) Escrita do sumário. (5min)
8) Resumo dos princípios de equivalência e de equações equivalentes. (10mins)
9) Correcção da questão 3, 4 e 5 da tarefa "O peso desconhecido das gomas" (20 mins)
10) Trabalho autónomo dos alunos. Resolução de exercícios da pág. 34. (20-25 mins)
11) Correcção no quadro. (15mins)
    i. A questão 1 não necessita ser corrigida no quadro. Será corrigida oralmente.
    ii. Pedir a alunos que tenham resoluções incorrectas para corrigir no quadro. Assim poderá surgir discussão na turma.
    iii. Possivelmente haverá mais dúvidas na 5.4, pois resulta uma equação –x=-32; na 5.6, e 5.7 poderão surgir dúvidas pelo aparecimento da propriedade distributiva. (já visto na última aula)

Se houver tempo.

12) Discutir alguns problemas em grande grupo. (25mins)
    i. A soma de um número com 14 é igual a 33. De que número se trata?
    ii. O dobro de um número somado com 10 é igual a 42. Que número é esse?
    iii. A idade da Ana e da Daniela somadas é 25. A Ana tem mais 3 anos do que a Daniela. Quantos anos têm as raparigas?
13) Pretende-se que consigam escrever a equação relativa a cada problema e interpretar a solução no contexto do problema.
14) Escrever no quadro:
    a. Resolução de problemas.
        i. Ler atentamente o enunciado e distinguir o que é pedido.
        ii. "Ler à matemática".
        iii. Escrever uma equação que traduza o problema
        iv. Resolver a equação.
        v. Verificar se a solução da equação também é solução do problema
        vi. Apresentar a resposta ao problema
15) Trabalho a pares. Manual pág. 32 e 33. (20 mins)
16) Correcção no quadro –
    i. Dar especial atenção à forma como os alunos chegam à equação. Tentar que os alunos expliquem o raciocínio.
    ii. Na questão 4 surgem os números pares consecutivos. Talvez tenha de dar alguma ajuda de modo a perceberem que 2n representa um número par e 2n+1 é o par consecutivo.
    iii. Na questão 7 a solução da equação não é solução do problema. Será importante que todos percebam.

Notas:

Dependendo do decorrer da aula tenho a sensação que a correcção poderá não acontecer nesta aula ficando esta para a aula do dia 23 de Maio.

Anexo 9: Plano de Aula – 23 de Maio 2011

<table>
<tr><td><u>Unidade Temática:</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita</td><td>Lições nº x+4 e x+5
Data: 23 de Maio 2011

Sala:</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Tema:</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita
 <u>Sumário:</u>
Resolução de problemas através de equações. </td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Tópicos: (Conceitos, conteúdos)</u>
Equações do 1º grau a uma incógnita.
Resolução de problemas.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Objectivos Específicos:</u>

Tradução de linguagem natural para linguagem matemática.
Resolução de equações;
Interpretar a solução da equação no contexto do problema.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Recursos:</u>

Manual (Vol. 3), página 35 – exs. 6,7,8,10 e 11
Manual (Vol.3), págs. 32,33 – exs. 2 a 7</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Estratégias:</u>
Resolução de exercícios. Trabalho individual. Correcção no quadro.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Avaliação:</u>
Questionamento oral (Professor/turma e Professor/aluno).

Correcção no quadro.</td></tr>
</table>

Desenvolvimento da aula:

17) Escrita do sumário. (5min)
18) Discutir alguns problemas em grande grupo. (25mins) – *Introduzir com o Diofanto???*
    i. A soma de um número com 14 é igual a 33. De que número se trata?
    ii. O dobro de um número somado com 10 é igual a 42. Que número é esse?
    iii. A idade da Ana e da Daniela somadas é 25. A Ana tem mais 3 anos do que a Daniela. Quantos anos têm as raparigas?
    iv. A soma de dois números inteiros consecutivos é igual a 47.
19) Pretende-se que consigam escrever a equação relativa a cada problema e interpretar a solução no contexto do problema. No entanto, penso que não posso obrigar ninguém a escrever a equação relativa ao problema.
20) Escrever no quadro:
    a. Resolução de problemas.
        i. Ler atentamente o enunciado e distinguir o que é pedido.
        ii. "Ler à matemática".
        iii. Escrever uma equação que traduza o problema
        iv. Resolver a equação.
        v. Verificar se a solução da equação também é solução do problema
        vi. Apresentar a resposta ao problema
21) Trabalho a pares. Manual pág. 35. (20 mins)
22) Correcção no quadro. (20 mins)
    i. Dar especial atenção à forma como os alunos escrevem a equação. Raciocínios.
    ii. Na questão 6) perguntar qual a idade dos 2 irmãos.
    iii. Na questão 7 perguntar quanto mede o comprimento do lado do quadrado. A resposta poderá ser "mede 5" o que não está correcto.
    iv. Na questão 11 os números não são inteiros. É um bom problema para quem aplica as técnicas de contagem.
23) Truque de magia: (15 mins)
    a. Pedir a um aluno que:
        i. Pense num número
        ii. Duplica-o.
        iii. Adiciona 4 ao resultado.
        iv. Multiplica-o por 5.
        v. Adiciona 12.
    b. Para adivinhar o número, basta subtrair 32 ao resultado final e dividir por 10.
    c. Suscitar a curiosidade e pedir que tentem explicar como se chega à solução.
    d. Pretendo que escrevam a equação, resolvam-na de forma a entender as equações equivalentes e não só a solução.
    e. Para o caso particular do número pensado ser 4 o resultado final é 72.
    f. Se resolvermos a equação fica: $5(2x+4)+12=72 \Leftrightarrow 10x+20+12=72 \Leftrightarrow 10x = 72-32 \Leftrightarrow x = 40/10$

24) Se houver alguém que acabe mais cedo pode fazer manual – página 32, exercícios 2,3,5,6,7.

Anexo 10: Questionário

Questionário

Nome: ____

Com este questionário pretendo conhecer melhor o que representa para ti a matemática e as equações.

1. Escreve uma palavra que represente o que pensas quando se fala de matemática.

2. Na tua opinião para que serve a matemática?

3. Quanto tempo dedicas ao estudo da matemática fora da sala de aula?

4. Escreve 5 palavras relacionadas com equação.

5. Para que serve uma equação?

6. Dá um exemplo de equação.

7. Se tivesses de explicar como se resolve a equação $2x + 3 = x + 4$, como farias?

8. Na equação $6x + 4 = 3x - 2$, o António afirmou prontamente que a solução da equação é $x = 2$. Concordas com o António? Explica a tua resposta

9. Preferes resolver equações ou problemas que envolvam equações?

10. Das tarefas realizadas na aula houve alguma que tenhas gostado mais? Porquê?

11. Das aulas sobre equações refere os aspectos que tenhas gostado mais e os que não te agradaram tanto.

Obrigado pelas tuas respostas!

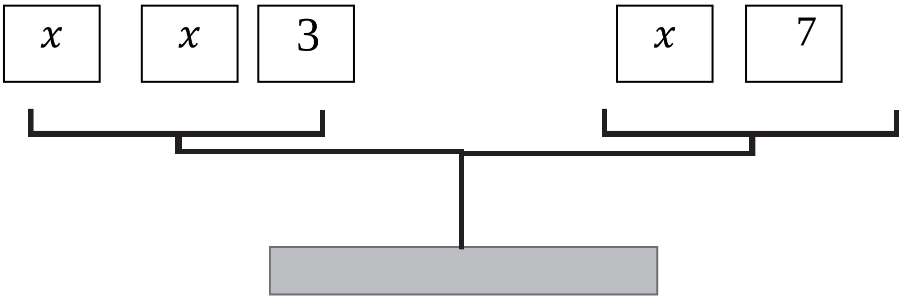
Anexo 11: Entrevista

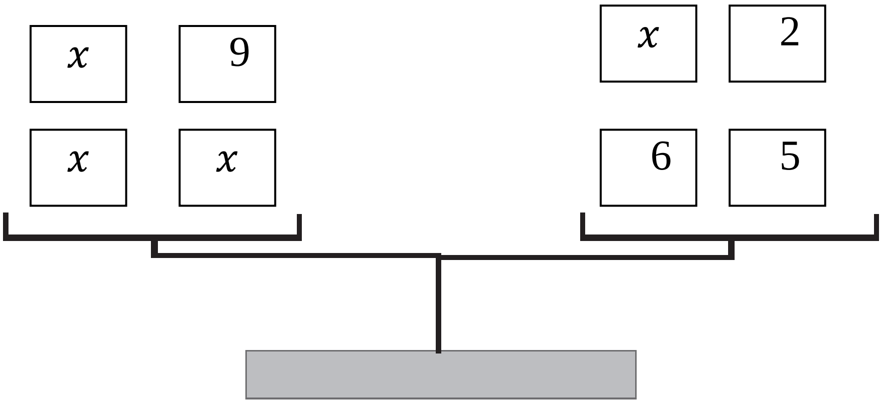
Entrevista

Nome:____

1. Considera as seguintes balanças em equilíbrio:

Em cada uma delas descobre o valor desconhecido.





2. Resolve as seguintes equações:

a) $x + 4 = 9$

b) $2x + 4 = x + 9$

c) $6x - 3 + x = 5x + 9$

d) $3(x + 3) = 2(x + 2) + 5$

3. O Tomás, um aluno do 7º ano adora resolver equações de 1º grau. Acontece que ele é muito distraído e engana-se com facilidade a resolver equações de 1º grau.

Podes ajudar o Tomás a descobrir os seus erros? Identifica os erros fazendo um círculo à volta e corrige a equação se achares necessário.

a)

$$\mathbf{3+4x=11} \Leftrightarrow 7x=11 \Leftrightarrow x=\frac{11}{7}$$

b)

$$\mathbf{6(x-4)+2=5x} \Leftrightarrow 6x-24+2=5x \Leftrightarrow 6x-22=5x \Leftrightarrow x=-22$$

c)

$$\mathbf{7x+4=x+7} \Leftrightarrow 7x-x=7-4 \Leftrightarrow 6x=3 \Leftrightarrow x=\frac{6}{3} \Leftrightarrow x=2$$

4. A Joana e Carla vão comprar uma prenda para a Beatriz. As duas amigas juntas têm 24 euros mas a Joana tem mais 8 euros do que a Carla. Quanto dinheiro tem cada rapariga?

5. A soma de um número com o seu dobro e o seu triplo é 24. De que número se trata?

6. A soma das idades do Miguel e da sua irmã é 22 anos. Sabendo que o Miguel é mais velho 12 anos que a sua irmã, determina a idade do Miguel.

7. Se ao dobro de um número juntar 12 unidades obtenho o quádruplo desse número. Qual é o número?

Anexo 12: Pedido de Autorização à Direcção da Escola

Ex.^{ma} Senhora

Directora da

Escola básica do 2.º e 3.º ciclos [redacted]

Carlos Filipe Fernandes, aluno do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade de Lisboa, vem, por este meio, solicitar a sua autorização para observar e leccionar no 7.º ano de escolaridade da turma [redacted], a unidade de Equações do 1º grau, no âmbito de uma investigação individual que culminará com o relatório de Mestrado.

O relatório *"Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações do 1º grau*" visa investigar de que forma a unidade de ensino baseada no estudo das equações, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 7º ano de escolaridade.

Fico à inteira disposição de V. Exa. para complementar toda a informação que julgue oportuna.

Agradecendo desde já a sua colaboração, subscrevo-me com os melhores cumprimentos,

Atenciosamente

Carlos F. Fernandes

Anexo 13: Pedido de autorização aos Encarregados de Educação.

Ex.$^{mo(a)}$ Sr.$^{(a)}$

Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade de Lisboa, estou a conduzir um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 7º ano. Para este efeito, preciso de recolher dados sobre o tipo de ensino exercido, realização de tarefas que consistem na observação e leccionação das aulas em que é leccionada a unidade didáctica das Equações.

Com esta finalidade, irei proceder à recolha de dados, comprometendo-me desde já a garantir o anonimato e a confidencialidade dos dados recolhidos, que apenas serão usados no âmbito da investigação.

Agradeço, desde já, a colaboração prestada por V. Exª, solicito que assine a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la ao professor de Matemática.

Com os melhores cumprimentos,

Carlos Fernandes

[redacted], 02 de Maio de 2011

-

Declaro que autorizo o(a) meu(inha) educando(a) ____________________________ _________N.º ______da Turma [redacted] do 7.º ano, a participar na recolha de dados conduzido pelo Dr. Carlos Filipe Fernandes no âmbito da dissertação de Mestrado.

[redacted], _____ / _____ / __________

Assinatura

____